دو فصلنامهٔ
مجلهٔ علمی- تحقیقی عینک – علمي څېړنیزه شپږ میاشتنۍ
د امتیاز خاوند: لوګر پوهنتون
د مجلې د جواز نېټه: ۱۴ / ۱۱/ ۱۴۴۴

# د ډائیوپنټاین خطي معادلې عمومي حل په لاسته راوړلو کې د محدود مسلسل ساده کسر اغېزه

**پوهندوی محمد فاروق حکیمي[1] او پوهنیار عبد الرقیب مسلمیار[2]**

ریاضي څانګه، طبیعي علومو پوهنځی، د کابل ښوونې او روزنې پوهنتون: افغانستان.

برېښنالیک: Farooq123hakimi@gmail.com

**لنډیز**

**ستونزه**: شتو څېړنو ته په کتو د ډائیوپنټاین خطي معادلې ابتدایي حل د محدود مسلسل ساده کسر په مرسته څېړل شوي دي. مګر د محدود مسلسل ساده کسر څخه لاسته راغلي ابتدایي حل په مرسته او د مستقیم ثبوت پر مټ د دوه متحوله خطي معادلې عمومي حل څېړل شوی نه دی او د یاد حل په لاس ته راوړلو کې د اقلیدس الګوریتم اغېزه هم په ډاګه شوې نه ده.

**موخه**: د پورتني ابتدایي حل په مرسته د د ډائیوپنټاین خطي معادلې عمومي حل لاس ته راوړل او د عمومي حل په لاسته راوړو کې د اقلیدس الګوریتم اغېزه په ګوته کول.

**څېړني مېتود**: داچې تطبیقي څېړنه ده نو د Systematic review له لارې موخې ته ډېرې نږدې د کره څېړنې ژوره مطالعه او د مختلط مېتود په مرسته اړین معلومات را غونډ شوي دي له محدود مسلسل ساده کسر څخه لاسته راغلي ابتدایي حل د دوه متحوله خطي معادلې د لازمي او کافي شرایطو په پام کې نیولو سره د قضیې په جوړښت کې ثبوت شوې ده.

**پایله**: د محدود مسلسل ساده کسر څخه لاسته راغلي ابتدایي حل په مرسته او د مستقیم ثبوت پر مټ د ډائیوپنټاین خطي معادلې عمومي حل لاسته راوړلای شو د اقلیدس الګوریتم په غیر مستقیمه توګه د حل په لاسته راوړلو کې اغېزه لري.

**کلیدي کلیمې**: محدود مسلسل ساده کسر ، عمومي حل، ډائیوپنټاین خطي معادله

استناد: حکیمي ، محمد فاروق. (۱۴۰۴) د ډائیوپنټاین خطي معادلې عمومي حل په لاسته راوړلو کې د محدود مسلسل ساده کسر اغېزه. *دوفصلنامهٔ علمی- تحقیقی عینک علمي- څېړنیزه مجله*، درییم کال، ۵ ګڼه، مخ ۱۳- ۲۴

DOI:　　　ناشر: پوهنتون لوګر

## سریزه

بسم الله الرحمن الرحیم

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰالَمِینَ وَالصَّلٰوةُ وَالسَّلَامُ عَلٰی سَیِّدِ الْمُرْسَلِینَ وَعَلٰی آلِهِ وَاَصْحٰابِهِ أَجْمَعِینَ، وَبَعْدُ!

**د مسئلې بیان**: د عددونو تیوري د ریاضیاتو له مهمو موضوعاتو څخه شمېرل کېږي، ډائیوپنټاین خطي معادله او حل یې په عددونو تیوري کې بنسټیز او ارزښتناکه موضوع ګڼل کېږي ( Zeng, 2016). تر ډېره بریده په تطبیقي ساحه کې دوه متحوله خطي معادلې پر ځای پاتي دي د بېلګه یې تحقیق په عملیاتو کې ده، څکه ټول خطي پروګرامینګ د یادې معادلې په جوړښت کې منځته کېږي (Xiao & Zhang, 2010). د اقلیدس الګوریتم، په لومړي ځل د اقلیدس له خوا په عملي برخه کې تطبیق شوي ده چې د دوو تامو عددونو د لوی ګډ قاسم په لاسته راوړلو کې موثره بلل شوي ده (Zhou, 2024). تام عددونه د خطي ترکیب په بڼه هم لیکلی شو چې دغه مفهوم د عددونو په تیوري او الجبرکې د پاموړ رول لوبوي (Zeng, 2015).

**د موضوع ارزښت**: د عددونو په تیوري کې دوه متحوله خطي معادله د ډائیو پینټاین معادلې په نامه هم یادېږي چې د ډائیو پینټس (Diophantus) ریاضي پوه له نوم څخه سرچینه اخلي ، نوموړي معادله د لومړي ځل لپاره د ډائیوپنټاین په واسطه څېړل شوې ده چې د عددونو د تیورۍ په برخه کې زیاتې لاسته راوړنې لري دا لاسته راوړنې نه یوازې په ریاضیکې مسایلو کې ګټورې تمامېږي، بلکې په نورو برخوکې لکه محاسبوي اله، کمپیوټري سیستم، تجارتي محاسبو، تدریسي مسایلو کې لکه د بشپړ او نابشپړ وېش او د لومړنیو عددونو د خواصو په ثبوت کې پوره ارزښت لري (Atkinson, 2009).

**مخینه**: د $ax - by = c$ دوه متحوله خطي معادلې ابتدایي حل د محدود مسلسل ساده کسر د قضیو او رابطو په مرسته لاسته راغلي چې د دغې کړنې په تر سره کولو سره د اقلیدس الګوریتم د تطبیق ساحې نوره هم وده کړې ده (Zeng, 2016).

داچې ډائیوپنټاین خطي معادله د عددونو تیوري اساسي موضوع ګڼل کېږي پر عملي برخې سربېره په تیوریکي ساحه کې هم ډېره د کارونې وړ ده؛ نو په همدغې موخه مې د ډائیوپنټاین خطي معادلې عمومي حل په لاسته راوړلو کې د محدود مسلسل ساده کسر اغېزه تر سرلیک لاندې علمي څېړنه پیل کړه چې د دوه متحوله خطي معادلې عمومي حل لاسته راوړو سره د اقلیدس

الګوریتم اغېزه په دغې برخه کې نوره هم پیاوړې شي. شتو څېړنو ته په کتو د محدود مسلسل ساده کسر څخه لاسته راغلي ابتدايي حل په مرسته او د مستقیم ثبوت پر مټ د دوه متحوله خطي معادلې عمومي حل څېړل شوی نه دی.

په دغې څېړنه کې د موضوع نوښت، موخه، ارزښت او اهمیت باندې بحث شوی په دویمه برخه کې هغه اساسي مفهومونه چې د څېړنې بنسټ جوړه وي، تعریف یا ثبوت شوی په درېیمه برخه کې د قضیه په چوکات کې د ابتدايي حل په کارونې سره عمومي حل لاسته راوړل شوی دی.

**د څېړنې موخې**

**اصلي موخه:** د محدود مسلسل ساده کسر په مرسته د ډائیوپنټاین خطي معادلې عمومي حل لاسته راوړل.

**فرعي موخې:**

- د محدود مسلسل ساده کسر په مرسته د خطي ډائیوپنټاین معادلې د عمومي حل په موندلو کې د اقلیدس الګوریتم د اغېزمنتیا تحلیل.
- د خطي ډائیوپنټاین معادلې د حل شتون شرایطو اړتیا.

**د څېړنې پوښتنې**

**اصلي پوښتنه:** د محدود مسلسل ساده کسر څخه لاسته راغلي ابتدايي حل په مرسته د ډائیوپنټاین خطي معادلې عمومي حل څنګه په ساده طریقه لاسته راځي؟

**فرعي پوښتنې:**

- د محدود مسلسل ساده کسر په مرسته د خطي ډائیوپنټاین معادلې د عمومي حل په موندلو کې د اقلیدس الګوریتم په مستقیمه یا غیر مستقیمه توګه اغېزه لري؟
- د ذکر شوي کړنلارې په تطبیق کې د خطي ډائیوپنټاین معادلې د حل شرایط اړین دي؟

## مواد او کړنلاره

**تعریف:** محدود مسلسل عددي کسر په لاندې ډول دی.

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}}$$

د هر $i \geq 1$ له پاره $a_i > 0$ حقیقي عدد او د مسلسل کسر قسمي مخرج دی.

که $a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq \mathrm{i} \leq n$ وي، نو کسر د محدود مسلسل ساده کسر په نامه یادېږي چې په $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$ سره ښودل شوی دی.

د هر ساده محدود مسلسل کسر څخه یو نسبتي عدد لاسته راځي (دقیق،۱۳۹۲).

**قضیه**. هر نسبتي عدد د یو ساده محدود مسلسل کسر په شکل ښودلی شو (دقیق،۱۳۹۲).

ثبوت: د اقلیدس الګوریتم څخه په ګټې اخېستنې او همدارنګه د $\frac{a}{b}$ او $b > 0$ په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\begin{aligned}
a &= q_0 b + r_1 && 0 \leq r_1 < b\,,\\
b &= q_1 r_1 + r_2 && 0 \leq r_2 < r_1\,,\\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3 && 0 \leq r_3 < r_2\,,\\
r_2 &= q_3 r_3 + r_4 && 0 \leq r_4 < r_3\,,\\
&\vdots && \vdots\\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n && 0 \leq r_n < r_{n-1}\,,\\
r_{n-1} &= q_n r_n + 0
\end{aligned} \tag{1}$$

نامساوات $b > r_1 > r_2 > \cdots > r_i > \cdots$ ته په کتو سره نتیجه اخلو، داسې چې :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad s \cdot t \quad r_{n+1} = 0 \quad , \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= q_0 + \frac{r_1}{b}\\
\frac{b}{r_1} &= q_1 + \frac{r_2}{r_1}\\
&\vdots\\
\frac{r_{n-1}}{r_n} &= q_n
\end{aligned} \tag{3}$$

که د (3) رابطې قیمتونه یو په بل کې وضع کړو نو لرو چې:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

$$= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_3}{r_2}}} = \cdots$$

$$= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}} = [q_0; q_1, q_2, \cdots, q_n]$$

محدود ساده مسلسل کسر په دوه ډوله ښودلی شو چې په یوه ښودنه کې $n$ جفت او بله کې به $n$ تاق وي ( دقیق،۱۳۹۲).

**تعریف**: که $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$ ، نو د هر $k$، $0 \le k < n$، د $\alpha$، $k$ ام تقارب په لاندې توګه تعریفوو ( حیدری،۱۳۹۹).

$$c_k = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

**مثال**: د $\frac{41}{18} = [2; 3,1,1,2]$ خخه محدود مسلسل ساده کسرونه لاسته را وړئ!

$$c_0 = 2$$

$$c_1 = [2; 3] = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$c_2 = [2; 3,1] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}} = \frac{9}{4}$$

$$c_3 = [2; 3,1,1] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{16}{7}$$

$$c_4 = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{41}{18}$$

د هر محدود ساده مسلسل کسر $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$، $k$ ام تقرب لاسته راوړلو په موخه د $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ او $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ دوو سلسلو ګټه پورته کوو:

$$\begin{cases} P_0 = a_0 \\ P_1 = a_1 P_0 + 1 \\ \vdots \\ P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, \quad \forall n \ge 2 \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} Q_0 = 1 \\ Q_1 = a_1 \\ \vdots \\ Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}\,, \quad \forall n \geq 2 \end{cases} \qquad (5)$$

که $P_{-2} = 0\,, P_{-1} = 1,\,, Q_{-2} = 1\,, Q_{-1} = 0$ وي نو $(4)$ او $(5)$ رابطې د $n \geq 0$ له پاره صدق کوي.

**قضیه**: که $a_0 \in \mathbb{Z}\,, a_i \in \mathbb{N}$ ، $1 \leq i \leq n$ او $n \in \mathbb{N}$ وي، نو د هر مثبت حقیقي عدد $x$ له پاره لرو (Alhassan, & all,2014).

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, x] = \frac{xP_{k-1} + P_{k-2}}{xQ_{k-1} + Q_{k-2}}\,, \qquad k \in \mathbb{N}$$

ثبوت: د ریاضي استقراء مېتود په مرسته نظر $k$ ته قضیه ثبوتوو، پوهېږو چې د $k = 1$ کې صدق کوي او د $k$ له پاره قضیه خپل حالت غوره کوي.

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k, x] = \frac{xP_{k-1} + P_{k-2}}{xQ_{k-1} + Q_{k-2}} \qquad (6)$$

کافي ده تر څو ثبوت کړو چې د $k + 1$ له پاره دعوه هم رښتیا ده، د $(6)$ رابطه په پام کې نیسو او همدارنګه د $a_n \neq 1$ نو لیکلی شو چې:

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k, x] = \left[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{x}\right]$$

$$= \frac{(a_k + \frac{1}{x})P_{k-1} + P_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{x})Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{x(a_k P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}}{x(a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}}$$

$$= \frac{xP_k + P_{k-1}}{xQ_k + Q_{k-1}} \qquad (7)$$

یادونه د محدود ساده مسلسل کسر $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$، $k$ ام تقرب د محاسبې له پاره کافي ده که په $(6)$ رابطه کې $x = a_k$ وضع کړو نو لرو چې: $1 \leq i \leq n$

$$C_k = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k] = \frac{a_k P_k + P_{k-1}}{a_k Q_k + Q_{k-1}} = \frac{P_k}{Q_k}$$

لومړی مثال د $\frac{P_k}{Q_k}$ محاسبې له پاره بېلګه کېدای شي.

**قضیه**: که $k \geq -1$ تام عدد وي، نو $\qquad P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = (-1)^{k-1}$

ثبوت: پوهېږو چې $k=-1$ ،$k=0$ او $k=1$ قیمتونو کې صدق کوي، د $k$ طبیعي عددونو له پاره فرضیه په خپل حالت پاتېږي د بېلګې په توګه. $P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}=(-1)^{k-1}$

د $k+1$ له پاره فرضیه ثبوتوو:

$$\begin{aligned}P_{k+1}Q_k-Q_{k+1}P_k&=Q_k(a_{k+1}P_k+P_{k-1})-P_k(a_{k+1}Q_k+Q_{k-1})\\&=-(P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1})=-(-1)^{k-1}=(-1)^k\end{aligned}$$

عمومي پایله په دې ډول لیکو:

$$\gcd(P_k,Q_k)=\gcd(P_k,P_{k-1})=\gcd(Q_k,Q_{k-1})=1.$$

فرض کړو چې $\gcd(P_k,Q_k)=d$ دی نو کولای شو ولیکو.

$$\begin{aligned}&d|P_k\,,d|Q_k\ \Rightarrow d|P_kQ_{k-1}\,,d|Q_kP_{k-1}\ \Rightarrow\\&d|P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}\ \Rightarrow\ d|(-1)^{k-1}\Rightarrow d=1\end{aligned}$$

که $ax+by=d$ ډائیوپنټاین دوه متحوله خطي معادله حل ولري او $(x_0,y_0)$ د نوموړې معادلې ابتدایي حل چې د اقیلدس الګوریتم بک وارډ ( د پاتې شونې له مخې د معادلې تشکیلول په مرسته لاسته راغلې وي، عمومي حل یې په لاندې ډول دی:

$$(x,y)=(x_0\pm\frac{b}{d}t,y_0\mp\frac{a}{d}t),\qquad t\in\mathbb{Z}$$

که نوموړې معادله $ax-by=d$ شکل ولري نو عمومي حل یې :

$$(x,y)=(x_0+\frac{b}{d}t,y_0+\frac{a}{d}t),\qquad t\in\mathbb{Z}$$

دی او $(x_0,y_0)$ د اقلیدیس الګوریتم بک وارډ څخه لاسته راځي.

فرضوو چې $a$ او $b$ تام عددونه او $d$ یې لوی ګډ قاسم دی، نو د $ax-by=d$ معادلې حل د محدود مسلسل ساده کسر په مرسته لاسته راوړو. که $\frac{a}{b}$ یاد کسر وي، محدود مسلسل متقارب زنځیري کسرونه په لاندې توګه دی:

$$\left[\frac{P_0}{Q_0},\frac{P_1}{Q_1}.\cdots,\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}},\frac{P_k}{Q_k}\right]=\frac{a}{b}\qquad\qquad(8)$$

پوهېږو چې $\gcd(a,b)=d$ دی نو $a=d\acute{a}$ ،$b=d\acute{b}$ او $\gcd(\acute{a},\acute{b})=1$ داچې $\frac{P_k}{Q_k}=\frac{\acute{a}}{\acute{b}}$ کسرونو مساوي او د اختصار وړ نه دی نوځاځا $Q_k=\acute{b},P_k=\acute{a}$ صدق کوي د دویمې قضیې په لاندې رابطه کې قیمتونه وضع کوو:

$$\acute{a}Q_{k-1} - \acute{b}P_{k-1} = (-1)^{k-1} \qquad (9)$$

که د (9) رابطې دواړه لوري په $d$ کې ضرب کړو نو لرو:

$$aQ_{k-1} - bP_{k-1} = d\acute{a}Q_{k-1} - \acute{d}bP_{k-1} = d(-1)^{k-1} \qquad (10)$$

او یا

$$(-1)^{k-1}aQ_{k-1} - (-1)^{k-1}bP_{k-1} = d \qquad (11)$$

د (11) رابطې څخه د معادلې $ax - by = d$ تام حل په دې ډول لاسته راځي (Zeng, 2016).

$$\begin{cases} x = (-1)^{k-1}Q_{k-1} \\ y = (-1)^{k-1}P_{k-1} \end{cases} \qquad (12)$$

## موندنې

**قضیه**: که $((-1)^{k-1}P_{k-1}, (-1)^{k-1}Q_{k-1})$ د $ax - by = d$ ډائیوپنټاین خطي معادلې تام حل وي، نو د $(x, y)$ نور تام حلونه یې $x = (-1)^{k-1}Q_{k-1} + Q_k \cdot t\,, y = (-1)^{k-1}P_{k-1} + P_k \cdot t,\ \ t \in \mathbb{Z}$ په دغې ډول دي په داسې حال کې چې $\gcd(P_k, Q_k) = d = 1$ وي.

ثبوت: راکړل شوی حل په $ax - by = d$ معادله کې وضع کوو:

$$ax - by = a(-1)^{k-1}Q_{k-1} - b(-1)^{k-1}P_{k-1}$$
$$a(x - (-1)^{k-1}Q_{k-1}) = b(y - (-1)^{k-1}P_{k-1})$$
$$\frac{a}{d}(x - (-1)^{k-1}Q_{k-1}) = \frac{b}{d}(y - (-1)^{k-1}P_{k-1})$$

د پورتنۍ قضیې څخه لرو چې: $Q_k = \frac{b}{d}, P_k = \frac{a}{d}$ او $\gcd(P_k, Q_k) = 1$

$$P_k(x - (-1)^{k-1}Q_{k-1}) = Q_k(y - (-1)^{k-1}P_{k-1})$$

دلته د اقلیدس لیما څخه استفاده کوو چې د معادلې عمومي حل په اسانه بڼه لاسته راوړو.

$$x - (-1)^{k-1}Q_{k-1} = Q_k \cdot t \Rightarrow x = (-1)^{k-1}Q_{k-1} + Q_k \cdot t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$y - (-1)^{k-1}P_{k-1} = P_k \cdot t \Rightarrow y = (-1)^{k-1}P_{k-1} + P_k \cdot t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^{k-1}Q_{k-1} + Q_k \cdot t \\ y = (-1)^{k-1}P_{k-1} + P_k \cdot t \end{cases}$$

دویمه پایله: که معادله د $ax + by = d$ شکل ولري نو عمومي حل یې بیا هم د لاندې رابطې په مرسته لاسته راوړلای شو:

$$P_kQ_{k-1} - Q_kP_{k-1} = (-1)^{k-1} \qquad (1)$$

د (1) رابطې دواړه خواوې په $(-1)^{k-1}$ ضربوو:

$$P_kQ_{k-1}(-1)^{k-1} - Q_kP_{k-1}(-1)^{k-1} = (-1)^{2(k-1)} \qquad (2)$$

$$P_kQ_{k-1}(-1)^{k-1} - \frac{1}{(-1)}Q_kP_{k-1}(-1)^{k} = ((-1)^2)^{k-1} = (1)^{k-1} = 1 \qquad (3)$$

$$P_kQ_{k-1}(-1)^{k-1} + Q_kP_{k-1}(-1)^{k} = 1 \qquad (4)$$

څرنګه چې $\gcd(P_k, Q_k) = 1$ دي نو په (4) رابطه کې د $x$ او $y$ قیمتونه په دې ډول دي.

$$\begin{cases} x = (-1)^{k-1}Q_{k-1} \\ y = (-1)^{k}P_{k-1} \end{cases} \qquad (5)$$

د (5) رابطې قیمتونه په $ax + by = d$ معادله کې وضع کوو چې د یادې معادلې عمومي حل په لاس راشي.

د تېرې قضیې څخه لرو: $P_k = \frac{a}{d}, Q_k = \frac{b}{d}$.

$$ax + by = a(-1)^{k-1}Q_{k-1} + b(-1)^{k}P_{k-1}$$

$$\frac{a}{d}(x - (-1)^{k-1}Q_{k-1}) = \frac{b}{d}((-1)^{k}P_{k-1} - y)$$

$$P_k(x - (-1)^{k-1}Q_{k-1}) = Q_k((-1)^{k}P_{k-1} - y)$$

بیا هم د اقلیدس لیما په مرسته لیکوچې:

$$P_k(x - (-1)^{k-1}Q_{k-1}) = Q_k((-1)^{k}P_{k-1} - y)$$

$$x - (-1)^{k-1}Q_{k-1} = Q_k \cdot t \Rightarrow x = (-1)^{k-1}Q_{k-1} + Q_k \cdot t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$(-1)^{k}P_{k-1} - y = P_k \cdot t \Rightarrow -y = -(-1)^{k}P_{k-1} + P_k \cdot t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^{k-1}Q_{k-1} + Q_k \cdot t \\ y = (-1)^{k}P_{k-1} - P_k \cdot t \end{cases}$$

**مثال**: د $\frac{41}{18}$ ساده محدود مسلسل کسر په مرسته د لاندې معادلې عمومي حل لاسته راوړو:

$$\left[2, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{7}, \frac{41}{18}\right] = \frac{41}{18}$$

حل:که معادله $41x-18y=1$ په پام کې ونیسو، ابتدایي او عمومي حل يې په لاندې ډول دی:

$$x=(-1)^{k-1}Q_{k-1}=(-1)^{5-1}Q_{5-1}=7$$
$$y=(-1)^{k-1}P_{k-1}=(-1)^{5-1}P_{5-1}=16$$
$$x=(-1)^{k-1}Q_{k-1}+Q_k\cdot t=7+18\cdot t$$
$$y=(-1)^{k-1}P_{k-1}+P_k\cdot t=16+41\cdot t$$

که په پورتنۍ معادله کې عمومي قیمت امتحان کړو نو لرو چې:

$$41(-7)-18(-16)=1$$
$$41(7+18\cdot t)-18(16+41\cdot t)=1$$

د $t$ هر قیمت له پاره صدق کوي د بېلګې په توګه که $t=1$ شي نو لرو چې:

$$41(-25)-18(-57)=1$$

که معادله $41x+18y=1$ شکل ولري بیا هم عمومي حل يې په لاندې ډول دی:

$$x=(-1)^{k-1}Q_{k-1}=(-1)^{5-1}Q_{5-1}=7$$
$$y=(-1)^{k}P_{k-1}=(-1)^{5}P_{5-1}=-16$$
$$x=(-1)^{k-1}Q_{k-1}+Q_k\cdot t=7+18\cdot t$$
$$y=(-1)^{k}P_{k-1}-P_k\cdot t=-16-41\cdot t$$

د $t$ هر قیمت لپاره صدق کوي.

## پایلیزه

څېړنه د خطي دوه متحوله معادلې عمومي حل لاسته راوړل باندې را څرخېږي د څېړنې پایلې وښودله چې د محدود مسلسل ساده کسر په مرسته د دوه متحوله خطي معادلې د ابتدایي حل تر څنګ عمومي حل هم لاسته راوړلای شو او ضمن کې ویلی شو چې په دغې طریقه حل موندل د اقلیدس الګوریتم ته په عملي ډګر کې نور هم پراخوالی ورکوي، د معادلې د حل په شتون کې مخکني شرایط په ځای او مراعات شوي دي.

### وړاندیزونه

د محدود مسلسل ساده کسر په مرسته د $ax\mp by=d$ معادلې حل دواړه حالتونو ته یوازیتوب ثبوتول.

د محدود مسلسل ساده کسر په مرسته د ډائیوپنټاین دوه متحوله خطي معادلې لپاره د $a$ خلاف د صفر یا $b$ خلاف د صفر شرط ثبوت.

## اخځلیکونه

دقیق، ح. (۱۳۹۲). نظریه اعداد. پوهنتون کاشان

حیدری، محمد خان (۱۳۹۹) نظریه اعداد. کابل: مطبعه پوهنتون کابل

Alhassan, E. A., Simon, K. N., Bunyan, J. M., & Gregory, A. (2014). On some algebraic properties of the Euclidean algorithm with applications to real life. Research Journal of Mathematics and Statistics, 6(4), 49-55.

Atkinson, K. (2009). Elementary NumericalAnalysis. Wiley, New York.

Braha, N. L. Hoxha, I. & Mecheri, S. (2015). On class $ mathcal {A}(k^{*}) $ operators. Annals of Functional Analysis, 6(4).

Douglas,J. and Burden Richard.(2012).Numerical Methods. Landan:Richord Stratton., Publishers.

Hamming, R. (2007). Numerical Methods for Scientists and Engineers,2nd,ed. New yark: Inc,New york.

Coclite, G. M., Holden, H., & Karlsen, K. H. (2009). Well-posedness of higher-order Camassa–Holm equations. Journal of Differential Equations, 246(3), 929-

Karloff, H. (2023). The Euclidean Algorithm. In Mathematical Thinking: Why Everyone Should Study Math (pp. 15-23). Cham: Springer Nature Switzerland.

Xiao, Y., & Zhang, H. Y. (2010). A note on convergence of semi-implicit Euler methods for stochastic pantograph equations. Computers & mathematics with applications, 59(4), 1419-1424.

Zeng, L. (2016). The Very Useful Linear Indefinite Equations in Applied Sciences.

Zeng, L. (2015l). A Note on Finitely Generated Z-module and Algebraic Integers. In 2015 International Conference on Education Reform and Modern Management.

Zhou, Z. Q. (2024). The Solution of the Indefinite Equation by the Method of Euclidean Algorithm. Open Access Library Journal, 11(8),1-8

Two Quarterly
Ainak Academic – Research Journal
Logar University Journal License Date: June/ 2023

# The Role of Finite Simple Continued Fractions in Determining General Solutions of Linear Diophantine Equations

Associate Professor Mohammad Farooq Hakimi and Teaching Assistant Abdul Raqib Muslimyar.

Email: Farooq123hakimi@gmail.com

Department of Mathematics, Kabul Education University

## ABSTRACT

**Background**: Previous research has primarily focused on obtaining preliminary solutions to linear Diophantine equations using finite simple continued fractions. However, these studies have not addressed how to derive the general solution of two-variable linear Diophantine equations directly from such preliminary solutions, nor have they clarified the role of the Euclidean algorithm in this process. **Aim**: The aim of this study is to derive the general solution of linear Diophantine equations from the preliminary solution obtained using finite simple continued fractions and to demonstrate the implicit role of the Euclidean algorithm in this derivation. **Method**: This applied research employed a systematic review to critically examine relevant studies. Using a mixed-methods approach, the required data were collected and analyzed. The preliminary solution obtained from finite simple continued fractions was rigorously proved within the framework of a theorem, considering the necessary and sufficient conditions of two-variable linear Diophantine equations. **Results:** The findings indicate that the general solution of linear Diophantine equations can be derived from the preliminary solution using direct proof. Furthermore, the study reveals the implicit influence of the Euclidean algorithm in achieving this solution. **Conclusion**: This study not only establishes the general solution of linear Diophantine equations from finite simple continued fractions but also underscores the indirect role of the Euclidean algorithm in the solution process.

**Keywords**: finite simple continued fraction, general solution, linear Diophantine equation.

**Cite this article:** Hakimi, M. F., & Muslimyar, A. R. (2026). *The role of finite simple continued fractions in determining general solutions of linear Diophantine equations*. Ainak Two-Quarterly Academic–Research Journal, 3(5), 13-24.