



## بررسی کاربرد مپینگ کانفورم در حالات مختلف در درجه حرارت پایدار

پوهنمل سید عبدالبشیر عثمانی<sup>۱</sup> و پوهنیار ذاکر حسین سیرت<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دپارتمنت الجبر، پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل.

<sup>۲</sup> دپارتمنت فزیک، پوهنځی علوم طبیعی، پوهنتون تعلیم و تربیه کابل.

ایمیل ادرس: bashirosmani868@gmail.com

### خلاصه

**بیان مسئله:** مپینگ کانفورم یکی از مفاهیم مهم در آنالیز مختلط است که کاربردهای وسیع در حل معادلات دیفرانسیل، فزیک و انجنیری دارد. با این حال، بسیاری از محققان با درک شهودی و کاربرد عملی آن مشکل دارند. این تحقیق تلاش دارد تا نقش و کاربردهای مپینگ کانفورم را در تحلیل مسائل فزیک از جمله در درجه حرارت پایدار را مورد بررسی قرار دهد.

**هدف:** تعیین نقش رهیافت مپینگ کانفورم در تحلیل مسائل فزیک از جمله در درجه حرارت پایدار در حالات مختلف مانند در درجه حرارت پایدار در نیم صفحه، در درجه حرارت ربع صفحه و مسائل مربوط به آن است.

**روش کار:** در این مقاله با استفاده از رهیافت «مپینگ کانفورم»، به حل یک تعداد مسائل فزیک پرداخته شده که شامل معادله لاپلاس با دو متغیر مستقل اند.

**نتایج:** نتایج این تحقیق نشان می دهد که مپینگ کانفورم به عنوان یکی از ابزارهای بنیادی و تحلیلی در ریاضیات مختلط، نقش اساسی در ساده سازی و حل دقیق مسائل مربوط به توزیع پایدار در درجه حرارت در نواحی با اشکال مغلق دارد.

**کلمات کلیدی:** ایزوترمها، در درجه حرارت پایدار، شرایط سرحدی، مپینگ کانفورم، مسئله مقدار

**استناد:** عثمانی، عبدالبشیر، و سیرت، ذاکر حسین. (۱۴۰۴) بررسی کاربرد مپینگ کانفورم در حالات مختلف در درجه حرارت پایدار. دو فصلنامه علمی - تحقیقی **عینک** علمی - خپرنیزه مجله، درېم کال، ۵ گڼه ، مخ ۴۲-۶۱

DOI:

حق مؤلف © نویسندگان.

ناشر: پوهنتون لوگر

## بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ وَالصَّلَاةُ وَالسَّلَامُ عَلَى سَيِّدِ الْمُرْسَلِينَ وَعَلَى آلِهِ وَاصْحَابِهِ أَجْمَعِينَ، وَبَعْدُ!

**بیان مسئله:** در علوم فزیکي و انجنیري تحلیل دقیق پدیده‌های چون انتقال حرارت، جریان سیالات، و ساحه‌های الکتریکی و مقناطیسی، از اهمیت خاص برخوردار است. یکی از مسائل کلیدی و مهم در این بخش‌ها، تحلیل توزیع دردرجه حرارت در اجسام مختلف تحت شرایط پایدار یا (Steady-State) است، یعنی زمانی که توزیع دردرجه حرارت با سپری شدن زمان تغییر نمی‌کند و سیستم در حالت تعادل حرارتی قرار دارد. تحلیل این نوع مسائل به ویژه در دستگاه‌های با اشکال مغلق سطوح نامنظم یا سرحد‌های غیر معمول چالش برانگیز و در عین حال بسیار کاربردی است. یکی از ابزارهای ریاضی نیرومند برای حل این گونه مسائل مپینگ کانفورم (Conformal Mapping) است، که امکان سهولت فضای مسأله را بدون از بین بردن خواص بنیادی فزیکي فراهم می‌سازد. (Goncharov, 2018; AYAD & ELHASADI, 2021; Wang, Ma, Wang, & Ren, 2015; WALA & KLOECKNER, 2018; Calixto, et al., 2010; Chen, Zhang, Fang, Chen, & Yu, 2024; Zhang, 2025)

**اهمیت و ضرورت:** مپینک کانفورم به صورت کلی نوعی تبدیل مختلط است که خواص زاویه‌ها را حفظ می‌کند، به معنی این‌که اگر در فضای اولیه دو منحنی در یک نقطه با زاویه خاصی یکدیگر را قطع کنند، در فضای تصویر (پس از تبدیل) نیز همان زاویه بین آن‌ها باقی می‌ماند. این ویژگی موجب می‌شود که مپینک کانفورم در مدل‌سازی پدیده‌های مانند ساحه‌های پوتانشیل (که از معادله لاپلاس پیروی می‌کنند) کاربرد زیاد داشته باشد؛ زیرا توابعی که در مپینک کانفورم استفاده می‌شوند، همیشه تحلیلی (Analytic) بوده و مشتقات آن‌ها نیز وجود دارد، که این امر با ماهیت معادله لاپلاس در هماهنگی کامل است

(Ghosh, Karmakar, & Raja Sekhar, 2021; Mohammed Zabih & Lahurikar, 2017; S.T. & P, 2020; H. Akselsen, 2025; Jin, Sun, Zong, Zou, & Hu, 2021)

در حالت پایدار انتقال حرارت، فرض می‌کنیم که در یک ناحیه خاص، تغییرات دردرجه حرارت فقط به مکان ارتباط دارد و هیچ وابستگی زمانی وجود ندارد. بنابراین معادله حاکم بر

سیستم معادله لاپلاس  $\nabla^2 T(x, y) = 0$  خواهد بود، که در آن  $T(x, y)$  نشان دهنده ددرجه حرارت در یک نقطه از صفحه است. این معادله به عنوان یکی از اساسی‌ترین معادلات در ریاضیات کاربردی و فزیک نظری شناخته می‌شود و حل آن در شرایط سرحدی خاص، اساس بسیاری از تحلیل‌های فنی و علمی به حساب می‌رود (Ablowitz & S. Fokas, 2003). با وجود این زمانی که شکل ناحیه مورد نظر مغلق باشد (مانند نواحی دارای حفره، زاویه‌های نوک‌تیز، سرحد‌های منحنی و غیره) حل تحلیلی یا حتی عددی این معادله بسیار مشکل می‌شود. در چنین شرایطی، مپینگ کانفورم به‌عنوان یک روش قوی و مؤثر، امکان تبدیل این نواحی مغلق را به اشکال ساده‌تر (مانند دیسک، نوار، یا صفحه نیمه بی‌نهایت) فراهم می‌سازد که در آن‌ها شرایط سرحدی و معادله لاپلاس به آسانی قابل حل است. (Bridges, 2016 & Turner)

پیشینه: تاریخچه استفاده از مپینگ کانفورم به قرن نوزدهم میلادی و آثار ریاضی‌دانانی چون گاوس، ریمان و گُوشی بازمی‌گردد؛ اما اوج کاربرد عملی آن در فزیک و انجینیری، به قرن بیستم و بعد از آن مربوط می‌شود. از نظر فزیک، مپینگ کانفورم نه تنها یک تبدیل هندسی است، بلکه یک ابزار مفهومی است؛ که اجازه می‌دهد خصوصیات اساسی سیستم مانند تناظر، رفتار سرحدی و حتی توزیع سیلان حرارتی بدون تحریف حفظ شود (Adamyan, 2024). برای مثال، اگر ددرجه حرارت در امتداد یک سرحد خاص به صورت تابعی داده شده باشد، پس از تبدیل این سرحد به یک سرحد جدید تبدیل می‌شود؛ ولی توزیع ددرجه حرارت (و در نهایت گرادیان حرارت) در سرحد جدید نیز ویژگی اصلی خود را حفظ می‌کند. این خصوصیت باعث می‌شود که نتایج به دست آمده از حل معادله لاپلاس در فضای جدید، پس از برگشت به فضای اصلی، کاملاً قابل اعتماد و معتبر باشند. (Bernard, Boffetta, Celani, & Falkovich, 2006; Arfken, Weber, & Harris, 2013)

**هدف تحقیق:** در این مقاله هدف آن است که به صورت کلی به بررسی کاربرد مپینگ کانفورم در توزیع‌های مختلف ددرجه حرارت در حالت پایدار پرداخته شود. در این جا مفاهیم اساسی استفاده از مپینگ کانفورم در ددرجه حرارت پایدار و حالات مختلف مانند، ددرجه حرارت در نیم صفحه و ربع صفحه، صفحات نیمه بی‌نهایت بررسی و فرمول‌های آن به دست آمده است.

**سؤال تحقیق:** کاربرد مپینگ کانفورم در توزیع‌های مختلف در درجه حرارت و در حالت پایدار به کدام نوع است؟

## مواد و روش کار

این تحقیق از نظر هدف، یک تحقیق بنیادی و تحلیلی است که براساس روش‌های نظری در ریاضیات کاربردی و فیزیک انجام شده است. تمرکز اصلی آن بر بررسی کاربرد مپینگ کانفورم در تحلیل و حل مسائل در حالات مختلف در درجه حرارت پایدار می‌باشد. مسائلی که توسط معادله لاپلاس در دو بعد توصیف می‌شوند. معادله لاپلاس برای توزیع در درجه حرارت  $T(x,y)$  در حالت پایدار به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

در این معادله،  $T(x, y)$  نشان‌دهنده در درجه حرارت در نقطه از صفحه است و فرض می‌شود که تابع و مشتقات جزئی آن تا مرتبه دوم پیوسته باشند، چون در حالت پایدار، تولید یا جذب داخلی حرارت در ناحیه وجود ندارد، بنابراین توزیع دما از این معادله پیروی می‌کند. در این تحقیق با استفاده از مپینگ کانفورم، چندین مسئله فزیک مربوط به معادله لاپلاس بررسی شده‌اند. این مسائل شامل حالت‌های مختلف در درجه حرارت پایدار، مانند نیم صفحه، ربع صفحه و مسائل مربوط آن می‌باشند. در هر مورد، ابتداء شرایط سرحدی و شکل هندسی مسئله مشخص گردیده، سپس با انتخاب مپینگ مناسب، ناحیه پیچیده به ناحیه ساده‌تر تبدیل شده تا حل تحلیلی معادله لاپلاس تسهیل گردد. البته بررسی و توضیحات مسائل متذکر در سطحی نسبتاً مقدماتی ارائه می‌شود.

## در درجه حرارت پایدار

در نظریه هدایت حرارتی سیلان عبوری از سطح یک جسم جامد در نقطه از آن سطح عبارت است از مقدار حرارتی که در امتداد مشخصی عمود بر سطح در واحد زمان و در واحد سطح از آن نقطه جریان دارد. بنابراین سیلان برحسب واحدهای از قبیل کالوری در ثانیه و در سانتی متر مربع اندازه‌گیری می‌شود. در این جا آن را به سمبول  $\Phi$  نمایش می‌دهیم و با مشتق معمولی در درجه حرارت  $T$  در نقطه روی سطح تغییر می‌کند. (Brown & Churchill, 2017)

$$\Phi = -K \frac{dT}{dN} \quad , \quad K > 0 \quad \dots \quad I$$

فرمول  $I$  به قانون فوریه معروف است و عدد ثابت  $K$  هدایت حرارتی جسم جامد با فرض اینکه متجانس باشد یاد می‌شود. نقاط جسم جامد با مختصات دیکارتی در فضای سه بعدی تعیین

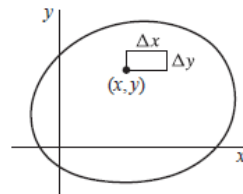
می‌شوند، در این جا دقت می‌کنیم که در درجه حرارت  $T$  تنها با مختصات  $x$  و  $y$  تغییر کند، چون  $T$  با مختص در امتداد محور عمود بر صفحه  $xy$  تغییر نمی‌کند، پس جریان حرارت دو بعدی و موازی با آن صفحه است. بر علاوه فرض می‌کنیم که جریان در حالت پایدار است؛ یعنی در درجه حرارت  $T$  با زمان تغییر نمی‌کند. فرض می‌شود که در داخل جسم جامد انرژی حرارتی تولید یا تلف نشود، یعنی هیچ منبع حرارتی یا رسوخ حرارتی در آن موجود نباشد، هم چنان تابع در درجه حرارت  $T(x, y)$  و همه مشتقات قسمی مرتبه اول و دوم آن در هر نقطه داخلی جسم جامد متمادی‌اند. این قاعده و فورمول  $I$  در مورد سیلان حرارتی اصول موضوعه نظریه ریاضی هدایت حرارتی هستند، اصول موضوعه که در نقاط داخل یک جسم جامد شامل توزیع متمادی منابع حرارتی یا رسوخ حرارتی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

حال یک عنصر حجم واقع در داخل جسم جامد را در نظر می‌گیریم طوری که این عنصر به صورت یک منشور مستطیلی به ارتفاع واحد عمود بر مستوی  $xy$  است با قاعده  $\Delta x$  در  $\Delta y$  در آن صفحه (شکل 1) نرخ زمانی جریان حرارت به طرف راست در طول وجه سمت چپ عبارت از  $-KT_x(x, y)\Delta y\Delta x$  است، و به طرف راست در طول وجه سمت راست عبارت است از  $-KT_x(x + \Delta x, y)\Delta y\Delta x$  با کاهش نرخ اولی از دومی نرخ خالص حرارتی عنصر را در میان آن دو وجه به دست می‌آوریم. اگر  $\Delta x$  بسیار کوچک باشد نسبت حاصل را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$-K \left( \frac{T_x(x + \Delta x, y) - T_x(x, y)}{\Delta x} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$-KT_{xx}(x, y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad \dots \quad II \quad \text{و یا}$$

قابل تذکر است که رابطه  $II$  تقریبی است و زمانی که  $\Delta x$  و  $\Delta y$  کوچک‌تر شوند در این صورت دقت اش افزایش می‌یابد.



(شکل 1)

به طریقه مشابه نرخ خالص حرارتی حاصل در میان وجه‌های دیگر عمود بر مستوی  $xy$  چنین حاصل می‌شود:

$$-KT_{yy}(x, y)\Delta x\Delta y \quad \dots \quad III$$

حرارت فقط از طریق این چهار وجه به عنصر داخل یا از آن خارج می‌شود و در درجه حرارت داخل عنصر پایدار است. بنابراین حاصل جمع فورمول‌های  $II$  و  $III$  مساوی به صفر می‌شود، یعنی

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad \dots \quad IV$$

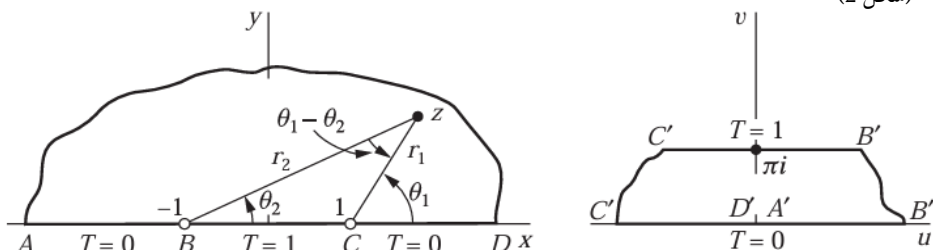
پس، تابع در درجه حرارت در هر نقطه داخلی جسم جامد در معادله لاپلاس صدق می‌کند. نظر به معادله  $IV$  و متمادیت تابع در درجه حرارت و مشتقات قسمی آن در ناحیه تعریف که معرف داخل جسم باشد،  $T$  تابع هارمونیک از  $x$  و  $y$  در ناحیه تعریف معرف داخل جسم جامد است. سطوح  $T(x, y) = c_1$  که در آن  $c_1$  عدد ثابت حقیقی ست ایزوترم‌ها (خطوط در درجه حرارت یکسان) داخل جسم جامد هستند، هم‌چنان می‌توان آن‌ها را به حیث منحنی‌های در صفحه  $xy$  در نظر گرفت، در این صورت  $T(x, y)$  را می‌توان به حیث در درجه حرارت در نقطه  $(x, y)$  لایه نازک از ماده در آن صفحه تغییر کرد که وجه‌های لایه عایق حرارت هستند. ایزوترم‌ها (خطوط در درجه حرارت یکسان) عبارت از منحنی‌های معادل تابع  $T$  اند. گرادیانت  $T$  در هر نقطه بر ایزوترم‌ها (خطوط در درجه حرارت یکسان) عمود هستند و سیلان اعظمی در یک نقطه در جهت گرادیانت در آن نقطه است. اگر  $T(x, y)$  معرف در درجه حرارت در یک لایه نازک باشد و  $S$  یک مزدوج هارمونیک تابع  $T$ ، در این صورت در هر نقطه که تابع تحلیلی  $T(x, y) + iS(x, y)$  باشد گرادیانت تابع  $T$  همان وکتور مماس بر منحنی  $S(x, y) = c_2$  است. منحنی‌های  $S(x, y) = c_2$  به نام خطوط جریان یاد می‌شود. اگر مشتق معمولی  $\frac{dT}{dN}$  در امتداد بخشی از سرحد لایه مساوی به صفر باشد، سیلان در درجه حرارت در امتداد آن بخش مساوی به صفر است. یعنی این بخش از نظر حرارتی عایق است و بنابراین یک خط جریان به حساب می‌رود. تابع  $T$  هم‌چنین می‌تواند نشان دهنده غلظت یک ماده باشد که در حال نفوذ درون یک جسم جامد است. در این صورت  $K$  ثابت نفوذ (Diffusion Constant) می‌باشد.

توضیحات فوق و استخراج معادله IV در مورد نفوذ در حالت پایدار (Steady-State Diffusion) نیز صدق می‌کنند.

### دردرجه حرارت پایدار در نیم صفحه

در این جا فرمولی را برای دردرجه حرارت پایدار  $T(x, y)$  در یک ورق نازک نیمه بی‌نهایت  $y \geq 0$  دریافت می‌کنیم که وجوه آن عایق است و لبه  $y=0$  آن در دردرجه حرارت صفر نگهداری می‌شود بجز از انتروال  $-1 < x < 1$  که در دردرجه حرارت واحد نگهداری شده است (شکل 2). (Spiegel, Lipschutz, Schiller, & Spellman, 2009).

(شکل 2)



تابع  $T(x, y)$  باید محدود باشد، اگر ورق مفروض را به‌حیث حالت حدی ورق  $0 \leq y \leq y_0$  در نظر بگیریم که وقتی  $y_0$  افزایش کند، لبه بالایی آن در دردرجه حرارت ثابتی نگه‌داشته می‌شود، این شرط طبیعی خواهد بود. در حقیقت از نظر فزیک منطقی‌ست وقتیکه  $y$  به‌طرف بی‌نهایت تقرب کند در این صورت تابع  $T(x, y)$  به‌طرف صفر تقرب می‌کند. مسئله قیمت سرحدی را که باید حل‌کرد می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad y < 0 \quad \dots \quad V$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases} \quad \dots \quad VI$$

هم‌چنان  $|T(x, y)| < M$  در آن  $M$  عدد ثابت مثبت است. این یک مسئله دیریکله برای نیمه بالایی صفحه  $xy$  است. هدف ازطریقه حل، به‌دست آوردن مسئله دیریکله جدیدی برای یک ناحیه در صفحه  $uv$  است. این ناحیه عبارت از تصویر این نیم صفحه تحت تبدیل  $w = f(z)$  که در ناحیه تعریف  $y > 0$  تحلیلی و در امتداد سرحد  $y=0$  به‌جز در نقاط  $(\pm 1, 0)$  که در آن‌ها تعریف نشده‌است، کانفورم است. دریافت تابع هارمونیک و محدود که در

مسئله جدید صدق کند، کار ساده خواهد بود. در این صورت جواب مسئله در صفحه  $uv$  را به جواب مسئله اصلی صفحه  $xy$  تبدیل می‌کنیم. به خصوص تابع هارمونیک از  $u$  و  $v$  به تابعی هارمونیک از  $x$  و  $y$  تبدیل می‌شود و شرایط سرحدی در صفحه  $uv$  روی بخش‌های متناظر سرحدی در صفحه  $xy$  حفظ خواهد شد. اگر همان  $T$  را برای نمایش توابع در درجه حرارت مختلف در دو صفحه استفاده کنیم، در این صورت ابهامی پیش نمی‌آید، پس می‌توانیم بنویسیم

$$z+1 = r_2 e^{i\theta_2} \quad , \quad z-1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

که در آن  $0 \leq \theta_k \leq \pi$  ،  $k=1,2$  و تبدیل

$$w = \log \frac{z-1}{z+1} = \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \quad , \quad \frac{r_1}{r_2} > 0 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_2 < \frac{3\pi}{2} \quad \dots \quad VII$$

در نیم صفحه بالایی  $y \geq 0$  به جز از نقاط  $z = \pm 1$  تعریف شده است؛ زیرا در آن ناحیه  $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$  است (شکل 2)، در حالی که  $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$  مقدار لوگاریتم، مقدار اصلی است. قطعه محور  $x$  واقع بین  $z = -1$  و  $z = 1$  که در آن  $\theta_1 - \theta_2 = \pi$  به روی لبه بالایی نوار نقش می‌شود و بقیه محور  $x$  که در آن  $\theta_1 - \theta_2 = 0$  به روی لبه پایینی نوار نقش می‌شود. شرایط مورد نیاز برای تحلیلی بودن و کانفورم بودن به طور واضح به واسطه تبدیل رابطه VII صدق می‌کند. یک تابع هارمونیک و محدود از  $u$  و  $v$  که روی لبه  $v = 0$  از نوار مساوی به صفر و روی لبه  $v = \pi$  مساوی به یک باشد، در این صورت به شکل ذیل است:

$$T = \frac{1}{\pi} v \quad \dots \quad VIII$$

تابع فوق هارمونیک بوده و بخش موهومی تابع کلی  $\frac{1}{\pi} w$  است. اگر با استفاده معادله ذیل به مختصات  $x$  و  $y$  تغییر مکان می‌دهیم داریم.

$$w = \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + i \arg \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad \dots \quad IX$$

درین صورت حاصل می‌شود که

$$v = \arg \left( \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}-1)} \right) = \arg \left( \frac{x^2 + y^2 - 1 + i^2 y}{(x+1)^2 + y^2} \right) = \arctan \left( \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right)$$

در این جا رنج تابع آرک تانجنت ( $\arctan$ ) بین صفر تا  $\pi$  است، زیرا

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \theta_1 - \theta_2$$

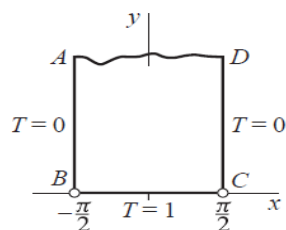
و  $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$ . در این جا تابع رابطه VIII به صورت ذیل حاصل می شود:

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right), \quad 0 \leq \arctan t \leq \pi \quad \dots \quad X$$

چون تابع رابطه VIII در نوار  $0 < v < \pi$  هارمونیک و تبدیل رابطه VII در نیم صفحه  $y > 0$  تحلیلی است، پس می توان نتیجه گرفت که تابع رابطه X در این نیم صفحه هارمونیک است. شرایط سرحدی دو تابع هارمونیک بر بخش های متناظر سرحدی یکی بوده و از نوع  $h = h_0$  هستند. بنابراین تابع محدود رابطه X جواب مطلوب مسئله اصلی است، البته می توان مستقیماً تحقیق کرد که تابع رابطه X در معادله لاپلاس صدق می کند و داری مقادیری است که وقتی نقطه  $(x, y)$  از بالا به محور  $x$  ها تقرب می کند، به مقادیر نشان داده شده به طرف چپ (شکل 2) تقرب می کنند. ایزوترم ها (خطوط در درجه حرارت یکسان)  $T(x, y) = c_1, \quad 0 < c_1 < 1$  عبارت اند از قوس های از دوایر  $x^2 + (y - \cot \pi c_1)^2 = \csc^2 \pi c_1$  که مراکز آن ها روی محور  $y$  ها است و از نقاط  $(\pm 1, 0)$  عبور می کند.

در نیت درجه می توان گفت که حاصل ضرب یک تابع هارمونیک در عدد ثابت نیز یک تابع هارمونیک بوده و تابع  $T = \frac{T_0}{\pi} \arctan\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right), \quad 0 \leq \arctan t \leq \pi$  نمایش در درجه حرارت پایدار در نیم صفحه مفروض است، در حالی که به عوض در درجه حرارت  $T = 1$  در امتداد قطعه  $-1 < x < 1$  از محور  $x$  در درجه حرارت ثابت  $T = T_0$  را در نظر بگیریم.

**مسئله:** یک قاب نیمه بی نهایت در فضای سه بعدی را در نظر می گیریم که به صفحات  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  و  $y = 0$  محدود است. دو سطح اول در درجه حرارت صفر نگهداری می شوند و سومی در درجه حرارت واحد.



(شکل 3)

در این جا می‌خواهیم عبارتی برای دردرجه حرارت  $T(x, y)$  در هر نقطه داخلی قاب دریافت کنیم. این مسئله هم‌چنان مانند مسئله دریافت دردرجه حرارت در ورق نازکی است به صورت نوار نیمه بی‌نهایت  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  ,  $y \geq 0$  زمانیکه که وجوه ورق کاملاً عایق‌بندی شده‌اند (شکل 3).

مقدار سرحدی مسئله در این جا عبارت است از

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad , \quad y > 0 \quad \dots (1)$$

$$T(-\frac{\pi}{2}, 0) = T(\frac{\pi}{2}, 0) = 0 \quad , \quad y > 0 \quad \dots (2)$$

$$T(x, 0) = 1 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \dots (3)$$

تابع  $T(x, y)$  محدود است. چون می‌دانیم که

$$w = \sin z \quad \dots (4)$$

مقدار سرحدی مسئله با در نظر داشت (شکل 2) و رابطه  $X$  به صورت ذیل تبدیل می‌شود

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \right) \quad , \quad 0 \leq \arctan t \leq \pi \quad \dots (5)$$

تغییر متحول های رابطه (4) را می‌توان به صورت

$$u = \sin x \cosh y \quad , \quad v = \cos x \sinh y$$

نوشت، تابع هارمونیک رابطه (5) به صورت ذیل است:

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2 \cos x \sinh y}{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y - 1} \right)$$

چون مخرج این کسر به  $\sinh^2 y - \cos^2 x$  تبدیل می‌شود و خارج قسمت را می‌توانیم به صورت ذیل بنویسیم:

$$\frac{2 \cos x \sinh y}{\sinh^2 y - \cos^2 x} = \frac{2 \frac{\cos x}{\sinh y}}{1 - \left(\frac{\cos x}{\sinh y}\right)^2} = \tan 2\alpha$$

در رابطه فوق  $\tan 2\alpha = \frac{\cos x}{\sinh y}$  بوده، بنابراین قیمت رابطه  $T = \left(\frac{2}{\pi}\right)\alpha$  مساوی است به

$$T = \left(\frac{2}{\pi}\right) \arctan\left(\frac{\cos x}{\sinh y}\right) \quad , \quad 0 \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2} \quad \dots \quad (6)$$

تابع آرک تانجنت دارای رنج از صفر تا  $\frac{\pi}{2}$  است؛ زیرا متغیر آن منفی نمی‌باشد.

چون  $\sin z$  تام و تابع رابطه (5) در نیم صفحه  $v > 0$  هارمونیک است. تابع رابطه (6) در

نوار  $y > 0$  ,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  هارمونیک می‌باشد. هم‌چنان تابع رابطه (5) در شرایط

سرحدی  $T = 1$  زمانیکه  $|u| > 1$  و  $v = 0$  و نیز در شرط  $T = 0$  هرگاه  $|u| > 1$  و  $v = 0$  صدق می‌کند. پس تابع رابطه (6) در شرایط سرحدی (2) و (3) صدق می‌کند. علاوه بر آن در

تمام نوار داریم  $|T(x, y)| \leq 1$ . بنابراین عبارت (6) فورمول دردرجه حرارت مطلوب است.

ایزوترم‌ها (خطوط دردرجه حرارت یکسان)  $0 < c_1 < 1$  ,  $T(x, y) = c_1$  عبارت‌اند از

بخش‌های از سطوح  $\cos x = \tan\left(\frac{\pi c_1}{2}\right) \sinh y$  که داخل قاب واقع‌اند، هر سطح از نقاط

$(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$  در صفحه  $xy$  عبور می‌کند. اگر  $K$  هدایت حرارتی باشد، سیلان حرارتی از سطح

واقع در صفحه  $y = 0$  به قاب به صورت

$$-KT_y(x, 0) = \frac{2K}{\pi s \cos x} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

می‌باشد. سیلان که از سطح واقع در صفحه  $x = \frac{\pi}{2}$  به طرف خارج می‌گذرد به صورت ذیل است:

$$-KT_x\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \frac{2K}{\pi \sinh y}, \quad y > 0$$

مسئله مقدار سرحدی را که در این بخش مطرح شد می توان به طریقه جدا سازی متحول ها نیز حل کرد. این طریقه بسیار مستقیم و آسان بوده؛ ولی جواب را به صورت یک سلسله بی نهایت ارائه می کند.

### دردرجه حرارت پایدار در ربع صفحه

حال دردرجه حرارت پایدار در ورق نازکی به صورت یک ربع صفحه را دریافت می کنیم که بخشی در انتهای یک لبه عایق باشد، بقیه آن لبه در دردرجه حرارت مشخصی و لبه دوم در دردرجه حرارت مشخص دیگری نگهداشته شود. سطوح عایق بوده و مسئله دو بعدی است.

مقیاس دردرجه حرارت و واحد طول را می توان چنان اختیار کرد که مسئله مقدار سرحدی

مربوط به تابع دردرجه حرارت  $T$  به صورت ذیل است

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0, \quad x > 0, \quad y > 0 \quad \dots \quad XI$$

$$\begin{cases} T_y(x, 0) = 0, & 0 < x < 1 \\ T(x, 0) = 1, & x > 1 \end{cases} \quad \dots \quad XII$$

$$T(0, y) = 0, \quad y > 0 \quad \dots \quad XIII$$

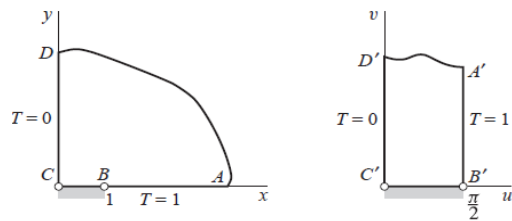
که در آن تابع  $T(x, y)$  در ربع صفحه محدود است. ورق و شرایط سرحدی آن به طرف چپ در (شکل 4) نشان داده شده اند. شرایط رابطه XIII مقدار مشتق معمولی تابع  $T$  را در بخشی از خط سرحدی و مقدار خود تابع را بر بقیه آن خط از پیش تعیین می کنند. طریقه جداسازی متحول ها در مورد چنین مسائلی که در امتداد یک خط سرحدی انواع مختلف شرایط را دارا باشند

مناسب نمی باشد. تبدیل  $w = \sin z$  که یک مپینگ یک به یک از نوار  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, v \geq 0$

به روی ربع صفحه  $x \geq 0, y \geq 0$  است. چون تبدیل  $w = \sin z$  یک به یک است و در تمام

نوار به جز در نقطه  $w = \frac{\pi}{2}$  کانفورم است. تبدیل معکوس باید در تمام ربع صفحه به جز از نقطه

$z = 1$  کانفورم باشد. طوری که در (شکل 4) نشان داده شده است:



(شکل 4)

این تبدیل معکوس قطعه خط  $0 < x < 1$  از محور  $x$  را به روی قاعده نوار و بقیه سرحد را به روی اضلاع نوار نقش می‌کند. چون معکوس تبدیل  $w = \sin z$  در ربع صفحه بدون وقتی که  $z = 1$  باشد کانفورم است. بنابراین جواب مسئله مفروض را می‌توان با دریافت تابعی که در نوار هارمونیک باشد و شرایط سرحدی که به طرف راست (شکل 4) نشان داده شده صدق کند. دیده می‌شود که این شرایط سرحدی از نوع  $h = h_0$  و  $\frac{dh}{dn} = 0$  هستند. تابع در درجه حرارت مورد نیاز برای مسئله مقدار سرحدی به صورت ذیل است:

$$T = \frac{2}{\pi} u \quad \dots \quad XIV$$

تابع  $\frac{2}{\pi} u$  بخش حقیقی تابع کلی  $w = \frac{2}{\pi} u$  است. حال تابع  $T$  را براساس متحول‌های  $x$  و  $y$  بیان می‌کنیم. برای به دست آوردن  $u$  براساس متحول  $x$  و  $y$  نظر به رابطه  $w = \sin z$  داریم:

$$x = \sin u \cosh v, \quad y = \cos u \sinh v \quad \dots \quad XV$$

زمانیکه برای  $0 < u < \frac{\pi}{2}$  قیمت‌های  $\sin u$  و  $\cos u$  غیر منفی باشند، در این صورت می‌توان نوشت

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1 \quad \dots \quad XVI$$

برای هر  $u$  مشخص هایپربولای XVI دارای محراق‌های است که در نقاط  $z = \pm \sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u} = \pm 1$  قرار داشته و محور محراقی آن قطعه خط واصل بین دو رأس به طول  $2 \sin u$  می‌باشد. بنابراین قیمت مطلق تفاضل فاصله‌های دو محراق از نقطه  $(x, y)$  واقع بر بخشی از هایپربولای در ربع اول مساوی است به

د وقتي  $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \sin u$  از رابطه XV نتیجه می شود که وقتی  $u = 0$  یا  $u = \frac{\pi}{2}$  باشد نیز این رابطه را صدق می کند. پس با در نظر داشت رابطه XIV تابع در درجه حرارت مطلوب به صورت ذیل است.

$$T = \frac{2}{\pi} \arcsin \left( \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2} \right) \quad \dots \quad XVII$$

در رابطه بالا برای  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$  تابع آرک سین داری رنج از صفر تا  $\frac{\pi}{2}$  است. اگر خواسته باشیم بررسی نمایم که این تابع در شرایط سرحدی XIII صدق می کند، باید به خاطر داشته باشیم که چون جذر مثبت  $\sqrt{(x-1)^2}$  معرف  $x-1$  است، در صورتی که  $x > 1$  باشد معرف  $1-x$  است. هم چنان برای  $0 < x < 1$  در درجه حرارت در هر نقطه در امتداد بخش عایق لبه پایینی ورق مساوی به  $x < 1$ ،  $\arcsin < \frac{2}{\pi}$  است. از رابطه XIV می توان

بررسی کرد که ایزوترم ها (خطوط در درجه حرارت یکسان)  $T(x, y) = c_1$ ،  $0 < c_1 < 1$  عبارت از بخش های از هایپربولاهم محراق در رابطه XVI که در آنها  $u = \frac{\pi c_1}{2}$  و در ربع اول قرار دارند، چون تابع  $v = \left(\frac{2}{\pi}\right)$  یک مزدوج هارمونیک تابع رابطه XIV است. در نتیجه، خطوط جریان عبارت از ربع بیضوی های هم محراق حاصل از ثابت قرار دادن  $v$  در رابطه XV است.

### بحث و مناقشه

استفاده از مپینگ کانفورم در تحلیل توزیع های پایدار در درجه حرارت، مزایای قابل توجهی را به همراه دارد، به ویژه زمانیکه با پیچیدگی های هندسی و ریاضی در تحلیل انتقال حرارت سروکار داشته باشیم. در حالات پایداری که در درجه حرارت در طول زمان تغییر نمی کند، معادله حاکم معادله لاپلاس می باشد، فرض می کنیم در داخل ناحیه، منبع تولید انرژی موجود نبوده و سیستم در تعادل حرارتی باشد. در چنین شرایطی اگر شکل هندسی جسم مغلق باشد (مانند لبه های منحنی، زوایای نوک تیز یا سوراخ ها)، دریافت حل تحلیلی برای معادله بسیار مشکل می گردد. مپینگ

کانفورم در این موارد ابزار بسیار مفیدی است که با تبدیل ناحیه مغلق به ناحیه ساده‌تر مانند صفحه، نیم‌صفحه یا دیسک واحد، شرایط را برای تحلیل و حل ساده‌تر می‌سازد.

یکی از مهم‌ترین مزایای مپینگ کانفورم این است که این تبدیل‌ها زوایا را حفظ می‌کنند و هم‌چنین خاصیت هارمونیک توابع را نیز حفظ می‌نمایند. چون توزیع دردرجه حرارت در حالت پایدار یک تابع هارمونیک است، مپینگ کانفورم باعث می‌شود این خاصیت در ناحیه جدید نیز باقی بماند. این بدان معنی است که اگر حل معادله در ناحیه ساده شده به دست آید، می‌توان آن را دوباره به ناحیه اصلی منتقل کرد، بدون آن‌که رفتار فزیکسی سیستم (مانند میل حرارت یا جهت سیلان حرارتی) دچار تغییر گردد. این امر برای انجیران و فزیک‌دانان اهمیت زیادی دارد؛ زیرا تحلیل و تفسیر جریان حرارت را در اشکال مغلق ممکن می‌سازد.

از سوی دیگر مپینگ کانفورم رفتار شرایط سرحدی را نیز به خوبی حفظ می‌کند. به‌طور مثال، شرایط نوع دیریکله و نیوتن، که در مسائل حرارتی بسیار معروف اند، در ناحیه جدید نیز به‌صورت منظم باقی می‌مانند. این امر باعث می‌شود تا این روش نه‌تنها از دیدگاه ریاضی زیبا و منظم باشد، بلکه از لحاظ کاربردی نیز دقیق و مفید واقع گردد. البته باید یادآور شد که این روش بیشتر برای مسائل دوبعدی مناسب است و ساختن توابع تحلیلی برای بعضی اشکال خاص ممکن است مشکل باشد. با وجود این محدودیت‌ها، کاربرد گسترده مپینگ کانفورم به‌ویژه در نظریه و عمل انتقال حرارت آن‌را به یکی از ابزارهای اساسی در فزیک، ریاضی و تحلیل انجیری مبدل می‌سازد.

نتایج به‌دست آمده در این مقاله با یافته‌های تحقیق‌های پیشین نیز هم‌خوانی دارد. برای مثال، (S.T. & P, 2020) و (AYAD & ELHASADI, 2021) نیز تأیید کرده‌اند که مپینگ کانفورم در تحلیل انتقال حرارت دوبعدی سبب حفظ دقت و سادگی حل می‌شود. هم‌چنان (H. Akselsen, 2025) در بررسی پدیده‌های امواج آبی از همین روش برای مدل‌سازی دقیق مرزهای پیچیده استفاده کرده‌است. در همین راستا، (Ghosh, Karmakar, & Raja Sekhar, 2021) و (Chen, Zhang, Fang, Chen, & Yu, 2024) نیز نشان داده‌اند که تبدیل‌های کانفورم موجب بهبود پایداری و کاهش خطای عددی در حل مسائل مشابه می‌گردد. هم‌چنین یافته‌های (Zhang, 2025) در فزیک نظری نشان می‌دهد که ویژگی حفظ زاویه‌ها و رفتار

تحلیلی توابع در نگاهت‌های کانفورم، یکی از عوامل کلیدی در انطباق میان تحلیل نظری و نتایج تجربی‌ست.

به صورت کلی، نتایج این تحقیق همسو با تحقیقات یادشده تأیید می‌کند که مپینگ کانفورم می‌تواند به عنوان یک ابزار ریاضی و فزیک‌ی کارآمد برای تحلیل دقیق‌تر و ساده‌تر مسائل پایدار حرارتی در نواحی با اشکال پیچیده به کار رود.

### نتیجه‌گیری

نتایج این مقاله نشان می‌دهد که مپینگ کانفورم به عنوان یکی از ابزارهای بنیادی و تحلیلی در ریاضیات مختلط، نقش اساسی در ساده‌سازی و حل دقیق مسائل مربوط به توزیع پایدار در درجه حرارت در نواحی با اشکال مغلق دارد. با توجه به این که معادله لاپلاس که پایه تحلیل در حالت پایدار انتقال حرارت است یک معادله هارمونیک بوده و خواص تحلیلی توابع مختلط را دارا می‌باشد، استفاده از مپینگ کانفورم به صورت طبیعی و منطقی در این زمینه توجیه پذیر است.

موضوعات که در مقاله بحث شده دیده می‌شود که با کاربرد مپینگ کانفورم نواحی‌ای که حل مستقیم معادله لاپلاس در آن‌ها مشکل یا حتی ناممکن است، به نواحی هندسی ساده‌تری (مانند نیم صفحه، ربع صفحه یا نوار نیمه بی‌نهایت) تبدیل می‌شوند. در این نواحی ساده شده، حل معادلات با استفاده از روش‌های کلاسیک مانند جداسازی متغیرها، سلسله‌های فوریه یا استفاده از توابع مختلط، بسیار آسان‌تر و دقیق‌تر صورت می‌گیرد. سپس نتایج به دست آمده به ناحیه اصلی بازگردانده شده و توزیع واقعی در درجه حرارت محاسبه می‌گردد.

این مقاله بر این نکته تأکید دارد که استفاده از مپینگ کانفورم در تحلیل مسائل پایدار حرارتی نه تنها باعث ساده‌سازی فرایند حل معادلات می‌گردد، بلکه درک بهتری از رفتار حرارتی در هندسه‌های مغلق به دست می‌آید. کاربرد این روش از حد مسائل نظری فراتر رفته و امروزه در طراحی‌های صنعتی، تحلیل‌های عددی و حتی در مدل‌سازی‌های چندفازی نیز جایگاه خود را یافته است.

**پیشنهادات:** مپینگ کانفورم نه تنها به حل معادلات در فضای نظری کمک می‌کند، بلکه در کاربردهای عملی مانند طراحی سیستم‌های سردکننده، تحلیل حرارتی قطعات الکترونیکی، بررسی پایداری ساختارهای مربوط حرارت و شبیه‌سازی رفتار مواد تحت بارهای حرارتی، دارای ارزش واقعی و قابل‌سنجش است. با توجه به شواهد ارائه شده در این مقاله، می‌توان نتیجه گرفت که

یادگیری و تسلط بر مفهوم و کاربرد مپینگ کانفورم برای محصلان و محققان رشته‌های فزیک، ریاضیات تطبیقی، انجینیری میخانیک و برق نه تنها مؤثر، بلکه یک ضرورت اساسی در تحلیل‌های دقیق و مؤثر سیستم‌های حرارتی به شمار می‌رود.

## منابع

- Ablowitz, M., & S. Fokas, A. (2003). *Complex Variables: Introduction and Applications* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Adamyany, G. (2024). Conformal maps and edge mode attenuation on imperfect boundaries. *arXiv preprint*. doi:10.48550/arXiv.2412.08518
- Arfken, G., Weber, H., & Harris, F. (2013). *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier.
- AYAD, W., & ELHASADI, O. (2021). Conformal Mapping as a Tool in Solving Some Mathematical and Physical Problems. *EUROPEAN ACADEMIC RESEARCH*, 8(10), 5972-5990.
- Bernard, D., Boffetta, G., Celani, A., & Falkovich, G. (2006). Conformal invariance in two-dimensional turbulence}. *Nature Physics*, 2. doi:10.1038/nphys217
- Brown, J., & Churchill, R. (2017). *COMPLEX VARIABLES AND APPLICATIONS* (9th ed.). McGraw-Hill.
- Burden, A., Burden, R., & Faires, J. (2016). *Numerical Analysis* (3rd ed.). BROOKS COLE PUB CO.
- Calixto, W., Alvarenga, B., daMota, J., da Cunha Brito, L., Wu, M., Jose Alves, A., . . . Antunes, C. (2010). Electromagnetic Problems Solving by Conformal Mapping: A Mathematical Operator for Optimization. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010(742039), 1-19. doi:https://doi.org/10.1155/2010/742039
- Chen, W., Zhang, D., Fang, Q., Chen, X., & Yu, L. (2024). Solving Conformal Mapping Issues in Tunnel Engineering. *Symmetry*, 16(1), 1-28. doi:https://doi.org/10.3390/sym16010086
- Ghosh, N., Karmakar, T., & Raja Sekhar, G. (2021). Application of conformal mapping to two-dimensional flows in an anisotropic aquifer. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 53, 617-626. doi:https://doi.org/10.1007/s13226-021-00153-1
- Goncharov, V. (2018). A conformal-mapping model for intrusion. *PHYSICS OF FLUIDS*, 30(10), 1-7. doi:https://doi.org/10.1063/1.5046380
- Griffiths, D. (2024). *Introduction to Electrodynamics* (5th ed.). Cambridge University Press.

- H. Akselsen, A. (2025). A precise conformally mapped method for water waves in complex transient environments. *Journal of Computational Physics*, 528, 113848. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2025.113848>
- Haberman, R. (2014). *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems* (5th ed.). Pearson Education Limited.
- Jin, G., Sun, Z., Zong, Z., Zou, L., & Hu, Y. (2021). Conformal Mapping-Based Discrete Vortex Method for Simulating 2-D Flows around Arbitrary Cylinders. *Journal of Marine Science and Engineering*, 9(12), 1409. doi:<https://doi.org/10.3390/jmse9121409>
- Kreyszig, E. (2010). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). Wiley.
- Mohammed Zabih, M., & Lahurikar, R. (2017). Applications of Conformal Mapping to Complex Velocity Potential of the Flow of an Ideal Fluid. *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*, 52(3), 196-202. doi:<https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V52P528>
- Narita, Y., Toepfer, S., & Schmid, D. (2023). Magnetopause as conformal mapping. *Annales Geophysicae*, 41(1), 87-91. doi:<https://doi.org/10.5194/angeo-41-87-2023>
- S.T., S., & P, O. (2020). Conformal Mapping and Its Applications to Heat Flow in Solids. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*, 16(3), 35-43. doi:10.9790/5728-1603023543
- Spiegel, M., Lipschutz, S., Schiller, J., & Spellman, D. (2009). *Schaum's Outline of Complex Variables* (2nd ed.). (M. Spiegel, S. Lipschutz, J. Schiller, & D. Spellman, Trans.) McGraw-Hill.
- Strauss, W. (2008). *Partial Differential Equations: An Introduction* (2nd ed.). Wiley.
- Turner, M., & Bridges, T. (2016). Time-dependent conformal mapping of doubly-connected regions. *Advances in Computational Mathematics*, 42(4), 947-972. doi:10.1007/s10444-015-9448-6
- WALA, M., & KLOECKNER, A. (2018). CONFORMAL MAPPING VIA A DENSITY CORRESPONDENCE FOR THE DOUBLE-LAYER POTENTIAL. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 40(6), A3715-A3732. doi:<https://doi.org/10.1137/18M1174982>
- Wang, W., Ma, W., Wang, Q., & Ren, H. (2015). Conformal Mapping for Multiple Terminals. *Scientific Reports*, 6(1). doi:10.1038/srep36918

- Zhang, J.-L. (2025). Conformal mapping in matching quark correlation functions to parton distribution functions. *Physical Review D*, *111*(7), 074016(1-6). doi:10.1103/PhysRevD.111.074016
- Zill, D., & Shanahan, P. (2013). *Complex Analysis: A First Course with Applications* (3rd ed.). Jones and Bartlett Publishers, Inc.



## A Study on the Application of Conformal Mapping in Various Steady-State Temperatures

Senior Teaching Assistant Sayed Abdul Bashir Osmani<sup>1</sup> and Senior Teaching Assistant Zaker Hussain Serat<sup>2</sup>

1. Department of Algebra, Faculty of Mathematics, Kabul University,

2. Department of Physics, Faculty of Natural Sciences, Kabul Education University.

Email Address: [bashirosmani868@gmail.com](mailto:bashirosmani868@gmail.com)

---

### ABSTRACT

---

Conformal mapping is a fundamental and powerful tool in the mathematical analysis of physical problems, particularly those involving Laplace's equation and partial differential equations. In many heat transfer problems, especially when the temperature distribution is steady and time-independent, determining the temperature distribution in bodies with complex geometric shapes can be challenging. In such cases, conformal mapping can simplify boundary conditions and the geometry of the domain without altering key physical characteristics such as angles or the behavior of the temperature function. This study investigates the application of conformal mapping in analyzing various steady-state temperature distributions and demonstrates how suitable conformal mappings can transform regions with complex shapes into simpler ones (such as strips, disks, or half-planes) for easier analytical solutions. The research methodology is analytical and theoretical: the governing equations of steady-state heat conduction and boundary conditions are introduced, corresponding harmonic functions are derived through conformal transformations, and the results are applied to physical examples. The findings indicate that conformal mapping not only simplifies the geometric and mathematical representation of the problem but also accurately preserves the temperature distribution and its gradient. Therefore, this method serves as an effective analytical tool for studying heat distribution in bodies with complex geometric shapes and can be applied in engineering design and numerical modeling.

**Keywords:** Boundary conditions, Boundary Value Problems, Conformal Mapping, Isotherms, Steady-State Temperature.

---

**Cite this article:** Osmani, S. A. B., & Serat, Z. H. (2026). *A study on the application of conformal mapping in various steady-state temperatures*. *Ainak Two-Quarterly Academic-Research Journal*, 3(5), 42-61.

DOI: © The Author(s)  
University

Logar