



د افغانستان اسلامي امارت

لوړو زده کړو وزارت

لوگر د لوړو زده کړو موسسه

علمي او محصلانو چارو معاونیت

څېړنو او علمي مجلې امریت



مجله علمی - تحقیقی **عینک** علمی - څېړنیزه مجله

دویم کال څلورمه پرله پسې ګڼه

کال: ۱۴۴۶ هـ. ق د ۱۴۰۴ ل. ل پسرلی

سورة الاخلاص

د عینک علمی - څېړنیزه شپږ میاشتني مجله

دو فصلنامه علمی - تحقیقی عینک

لوگر د لوړو زده کړو مؤسسې د عینک علمی - څېړنیزه مجله؛ دویم کال، څلورمه گڼه، د ۱۴۰۴ لمریز لیردیز کال پسرلی.

د څېړنې، تألیف او ژباړې ریاست لخوا د لوړ اکاډمیک اعتبار برخمنه مجله.

د امتیاز خاوند: لوگر د لوړو زده کړو مؤسسه

سرکټونکي: پوهندوی دوکتور وحیدالله عبدالرحیم زی او پوهندوی دوکتور محمد سرور حقیرست

مسؤل مدیز: پوهنیار عبدالعزیز عابد

دیزاین چارې:

د چاپ شمېر: ۱۵۰ ټوکه

برېښنالیک: ainakjournal@gmail.com

وېب پاڼه: <https://logu.edu.af>

کتنپلاوی

ټولنیز علوم

۱. پوهنوال دوکتور رحیم الله څیرک
۲. پوهندوی امام الدین ابراهیمي
۳. پوهندوی میرویس ستانکزی
۴. پوهندوی دوکتور فهیم رحیمي
۵. پوهندوی محمد طاهر خپلواک
۶. پوهنمل احمدولي عالمي
۷. پوهنیار احمدغیور یوسفزی
۸. پوهنیار یحیی حقمل

طبیعی علوم

۱. پوهنوال عبدالرحمن عثمانی
۲. پوهنوال نذیر خان محمدي
۳. پوهندوی محمد داود شیرزاد
۴. پوهندوی محمد رحیم رحیمي
۵. پوهنمل دوکتور محمد داود احمدزی
۶. پوهنمل دوکتور کیومرث پولادیان
۷. پوهنمل عبدالمقیم حسینی
۸. پوهنمل عبدالصبور فیضي

پته: لوگر ولایت، د مامورینو ښارگوټي ته مخامخ، لوگر پوهنتون.

لوگر د لوړو زده کړو مؤسسې د مشرتابه پیغام؛

حامداً و مصلیاً ، اَمَّا بَعْدُ !

د افغانستان اسلامي امارت په ځانگړې توگه د لوړو زده کړو وزارت ، علمي څېړنو ته ډېره پاملرنه کړې او په دې برخه کې د پام وړ لاسته راوړنې لري . د همدې هڅو په دوام لوگر د لوړو زده کړو مؤسسې د څلورمې گڼې د مجلې ترتیب ، چاپ او خپراوي د څېړنې او نوښت لپاره یو بل ستر گام گڼي چې د قدرمنو استادانو او څېړونکو هڅې او ژمنتیا انځوروي . د یادې گڼې په منځپانگه کې د طبیعي او ټولنیزو علومو بېلابېلې علمي او څېړنیزې مقالې وړاندې شوي چې د لیکوالانو تحلیلونه او نظرونه په علمي بڼه روښانه کوي چې د پوهې او علمي څېړنو بهیر پیاوړی شي ، محصلان او لوستونکي ورڅخه لازمه گټه واخلي . دا علمي څېړنیزه مجله د څېړونکو او علمي کادرونو د فکري ودې ، څېړنیزو وړتیاوو ، د نظرونو او تجربو د تبادلي ، علمي مرستو او نوښت وسیله ده چې ددې تحصیلي ادارې پرمختگونو ، بریاوې او هیلې څرگندوي .

په پای کې د څېړنو او علمي مجلې امریت ، مسؤل مدیر ، درنو استادانو ، څېړونکو ، لیکوالانو ، د کتنپلاوي هیئت او ټولو علمي او اداري برخې له همکارانو څخه مننه کوم چې ددې گڼې په ترتیب او چاپ کې یې وخت ، پوهه او هڅه و نه سپموله او ددې مؤسسې علمي هویت یې غښتلی کړ او د راتلونکو نسلونو لپاره یې د نوښت او لوستلو موقع په لاس ورکړه ، هیله لرم چې ستاسې په لاس د عینک علمي او څېړنیزې شپږ میاشتني مجلې منځپانگه گټوره او هڅوونکې وي .

والسلام

مفتي سید ضیاء الاحمد صارم

لوگر د لوړو زده کړو مؤسسې رئیس

۱۴۴۶/۱۲/۳

د مقالو ليکلو

گڼه	د مقالې عنوان	ليکوال/ ليکوالان
۱	مطالعه انتيگرا ل های غير خاص و محاسبه آن توسط قضيه ريزيدو	پوهنمل سيد عبدالشیر عثمانی
۲	مطالعه اختلالات طيف اوتيسم در اطفال	پوهنمل محمد عارف عرفان
۳	د عامې لوبيا په ودې او حاصل باندې د جيوه او هموار بستر د کښت اغېزې	پوهنيار سيدحفيظ الله حيات، پوهنيار کرامت الله فاضل او پوهنوال يوسف خان زيار
۴	بررسی نوآوری های جدید و چالش های مهم آن در جنتيک انسان	نامزد پوهنيار محدثه هاشمي و پوهندوی دکتور وحيدالله عبدالرحيم زی
۵	پر ملي اقتصاد باندې د فراه ولايت کرنېزې پانگونې اغېزې	فواد مومند، پوهنيار نصيراحمد نصرت او پوهنمل عبدالناصر صديقي
۶	بررسی مضامين اخلاقی و اجتماعی در اشعار حيدري وجودی	پوهندوی دکتور شفيق الله شفقت و پوهنمل دکتور بلال احمد فضلي
۷	بررسی سلامت عمومی روان محصلان مؤسسه تحصيلات عالی لوگر با تفکيک وضعيت تأهل	پوهندوی محمدطاهر خپلواک او نامزد پوهنيار نجيب الله نجيب
۸	بررسی کاربرد گونه های سجع در شعر واصل کابلي و تأثير آن بر سبک شناسی اشعار وی	پوهنمل دکتور بلال احمد فضلي و پوهندوی امام الدين ابراهيمی
۹	تبیین و تحلیل منهج، معایب و محاسن علمی، تفسیر فتح القدیر	پوهنمل خال محمد حقجو و دکتور امير جودوی
۱۰	د ماشومانو په اسلامي روزنه کې د جوماتونو رول	پوهنيار محمدنذير محمدي او پوهنمل ابراهيم نوري
۱۱	مشارکت عمومی -خصوصی: راهبردی برای توسعه زیربناها در کشورهای در حال توسعه	پوهنيار محمدرسول معنوی و پوهنيار محمد شعيب نوری
۱۲	د المشقة تجلب التيسير فقهي قاعدې څېړنه اوتطبيقي بېلگې	نامزد پوهنيار صفی الله حقميل

بخش

علوم طبیعی



مطالعه انتیگرال‌های غیرخاص و محاسبه آن توسط قضیه ریزیدو

پوهنمل سید عبدالبشیر عثمانی

۱. دپارتمنت الجبر، پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل، افغانستان.

ایمیل آدرس: bashirosmani^{۸۶۸}@gmail.com

خلاصه

انتیگرال‌های غیرخاص یا ناسره به عنوان یکی از مباحث اساسی در ریاضیات تطبیقی و نظری می‌باشد که نقش مهمی را در حل مسائل پیچیده ریاضی دارند. در این مقاله مروری بر اساس منابع مختلف روش‌های محاسبه این انتیگرال‌ها بررسی شده و کاربردهای عملی آن‌ها در بخش‌های مختلف ریاضی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. یکی از روش‌های مؤثر برای حل این انتیگرال‌ها استفاده از قضیه ریزیدو در تحلیل مختلط است که امکان ارزیابی انتیگرال‌ها را با بهره‌گیری از ریزیدوهای تابع در نقاط خاص فراهم می‌کند. در این مقاله ابتدا مفاهیم اساسی تحلیل مختلط معرفی، سپس روش محاسبه انتیگرال‌های غیرخاص از طریق قضیه ریزیدو توضیح و تشریح گردیده است. در ادامه چندین مسئله تطبیقی ارائه شده و فرمول بندی دقیق روش‌های مختلف مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که استفاده از روش قضیه ریزیدو باعث سهولت در محاسبه انواع انتیگرال‌های غیرخاص و دارای نقاط خاص می‌شود. همچنین قضایای کوشی و ژاردان در راستای بهبود دقت محاسبات انتیگرال‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

کلمات کلیدی: انتیگرال‌های غیرخاص، تابع تحلیلی، قضیه ریزیدو، نقاط خاص.

استناد: عثمانی، سید عبدالبشیر. (۱۴۰۴) مطالعه انتیگرال‌های غیرخاص و محاسبه آن توسط قضیه ریزیدو. دو فصلنامه

علمی-تحقیقی عینک علمی-خبرنیزه مجله، سال دوم، شماره ۴، صفحه ۶-۱۸. DOI:

حق مؤلف © نویسندگان.

ناشر: مؤسسه تحصیلات عالی لوگر

مقدمه

الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ، وَالصَّلَاةُ وَالسَّلَامُ عَلَى سَيِّدِنَا مُحَمَّدٍ وَعَلَى آلِهِ وَأَصْحَابِهِ أَجْمَعِينَ.

انتیگرال توابع متحول مختلط در ذات خود یک انتیگرال منحنی الخط از نوع دوم است که متحول را به امتداد منحنی در نواحی یک ارتباطی و چندین ارتباطی محاسبه می‌کند؛ این محاسبه در نواحی چندین ارتباطی پیچیده‌تر می‌شود. روش‌های معمولی محاسبه انتیگرال‌ها همچنان استفاده از فورمول کوشی آن‌قدر ساده به نظر نمی‌رسد. علاوه بر آن میتودهای محاسبه برخی انتیگرال‌های خاص و غیر خاص توابع متحول مختلط و یا متحول حقیقی که در ریاضیات کاربرد وسیع دارند و با استفاده از روش‌های معمولی قابل محاسبه نیست، شیوه‌های محاسبه آن‌ها در مستوی حقیقی و مستوی مختلط توجه علاقه‌مندان این بخش از ریاضیات را به خود جلب کرده‌اند. (Esmaeili, ۲۰۲۲; Shah & Kumar, ۲۰۲۴; Zhang, ۲۰۲۳).

در این مقاله تابع تحلیلی متحول مختلط و نقاط خاص متجزای آن، (Brown, ۲۰۲۳; Sanchez, ۲۰۲۴). محاسبه انتیگرال چنین توابع به امتداد منحنی بسته و باز در نواحی یک ارتباطی و چندین ارتباطی، تجزیه چنین توابع در اطراف نقطه خاص متجزای آن به سلسله لوران، ریزیدوی تابع تحلیلی متحول مختلط در نقاط خاص متجزای آن $z = a$ ، در نقطه ساده و تکراری $z = 0$ ، در ∞ ، روش‌های محاسبه ریزیدوی لوگاریتمی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. (Wang, ۲۰۲۴; Lee, ۲۰۲۳; White, ۲۰۲۱; Dai and Zhang, ۲۰۲۳). علاوه بر آن با استفاده از روش‌های ریزیدوی تابع تحلیلی برخی انتیگرال‌های خاص و غیرخاص توابع متحول حقیقی و مختلط که محاسبه آن‌ها به روش معمولی ممکن نیست، محاسبه شده است که یکی از موارد کاربرد قضیه ریزیدو تابع تحلیلی متحول مختلط را بیان می‌کند (Marsden, ۲۰۱۳; Carter, ۲۰۲۴; Huang et al., ۲۰۲۳).

هدف این مقاله ارائه یک دیدگاه جامع از روش‌های موجود و مقایسه آن‌ها از نظر موثریت و دقت در محاسبه است.

مواد و روش کار

این مقاله مروری است که با استفاده از منابع معتبر علمی با بررسی روش‌های محاسبه انتیگرال‌های غیر خاص از طریق تحلیل مختلط پرداخته است. در این راستا، در نخست منابع مختلفی شامل کتاب‌ها و مقالات علمی در بخش تحلیل مختلط و قضیه ریزیدو مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند؛ سپس مفاهیم اساسی و قضایای مهم در این زمینه تحلیل شده و برای درک بهتر موضوع، مسائل تطبیقی ارائه شده‌اند. این مسائل از میان مسائل مختلف معروف و شناخته شده در ریاضیات انتخاب شده‌اند تا نشان دهد که چگونه روش‌های مبتنی بر قضیه ریزیدو می‌تواند در محاسبه انتیگرال‌های غیر خاص به کار رود.

روش محاسبه انتگرال‌های غیر خاص با استفاده از قضیه ریزیدو

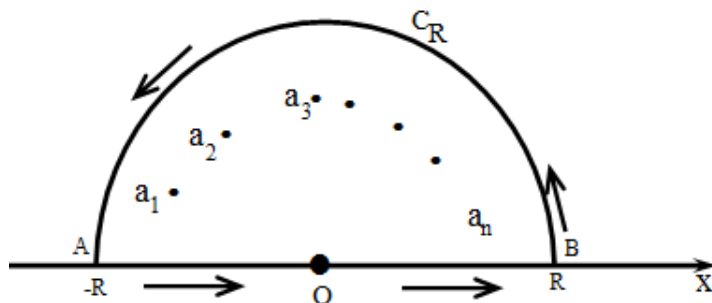
قضیه ریزیدو: فرض می‌کنیم نقطه بی نهایت بعید (∞) صفر ترتیب بلندتر از دو برای تابع $f(z)$ باشد؛ در این صورت تجزیه تابع $f(z)$ به سلسله لوران در اطراف نقطه $z = \infty$ دارای شکل ذیل است.

$$f(z) = \frac{C_{-r}}{z^r} + \frac{C_{-r}}{z^r} + \dots \quad (I)$$

(Privalov, ۲۰۲۳; Guo, ۲۰۲۴; Sousa, ۲۰۲۳; Zhang, ۲۰۲۳).

همچنان فرض کنیم تابع $f(z)$ در محور حقیقی و نیم مستوی بالایی $z > 0$ ($Im f(z) > 0$) دارای تعداد نهایی نقاط خاص $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ باشد.

در این صورت تمام نقاط خاص تابع $f(z)$ را می‌توان در داخل نیم دایره واقع در نیم مستوی بالایی با شعاع به قدر کافی بزرگ R با مرکز در مبدأ مختصات قرار دارد مانند شکل ذیل:



(شکل ۱)

طبق قضیه اساسی ریزیدو و برای تابع $f(z)$ رابطه ذیل را داریم:

$$\int_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f(z))|_{z=a_k}$$

$$L = C_R + \overline{AB}$$

در این صورت با در نظر داشت رابطه فوق می‌توان چنین بنویسیم:

$$\int_L f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx$$

بنابر این نظر به رابطه (I) داریم:

$$f(z) = \frac{1}{z^r} (C_{-r} + \frac{C_r}{z} + \dots) = \frac{1}{z^r} \varphi(z)$$

طوری‌که

$$\varphi(z) = C_{-r} + \frac{C_r}{z} + \dots$$

بوده و $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = C_{-r}$ می‌شود. از اینجا چنین نتیجه می‌شود که $\varphi(z)$ در تمام نقاط نیم دایره C_R محدود است یعنی $|\varphi(z)| \leq M = \text{const}$ و نقطه $z = \infty$ برای تابع $\varphi(z)$ نقطه متمادی می‌باشد، در نتیجه

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_R} \frac{\varphi(z)}{z^2} dz \right| \leq \frac{M}{R^2} \pi R$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

از اینکه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

است، در عین حال ثبوت گردید که اگر $f(z)$ شرایط ذکر شده فوق را صدق کند، در این صورت انتیگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz$ مساوی به حاصل ضرب عدد $2\pi i$ در حاصل جمع تمام ریزیدوهای تابع $f(z)$ در نقاط خاص متجزای آن که در نیم مستوی بالایی قرار دارند، می شود.

مسئله: با استفاده از قضیه ریزیدو انتیگرال غیرخاص $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ را بررسی می کنیم.
 طوریکه دیده می شود تابع $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ در نقطه بی نهایت بعید دارای صفر ترتیب چهار می باشد.
 اما در نقطه $z = \pm i$ دارای قطب ترتیب دو است؛ یعنی

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

نقطه $z = -i$ در نیم مستوی بالایی و یا نیم دایره بالایی قرار ندارد اما نقطه $z = i$ قطب ترتیب دو تابع $f(z)$ در نیم دایره بالایی می باشد در این صورت می توانیم چنین بنویسیم:

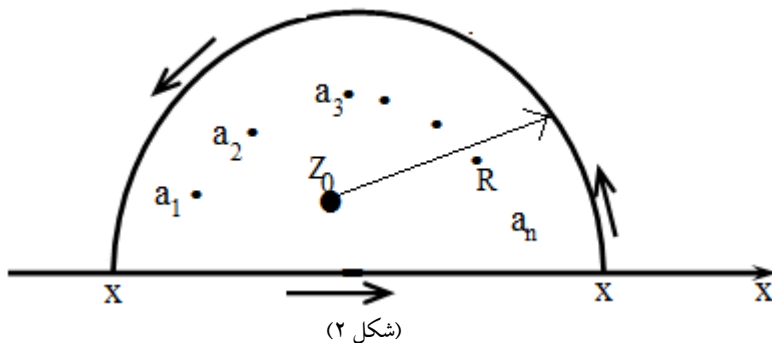
$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left[\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \right]_{z=i} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2} \right]_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+i)^2} \right]_{z=i} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left(-\frac{2(z+i)}{(z+i)^3} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \left(-\frac{2}{(z+i)^2} \right) = -\frac{2}{(i+i)^2} = -\frac{2}{(2i)^2} = -\frac{2}{4i^2} = -\frac{2}{4(-1)} \\ &= \frac{2i}{4i \cdot i} = -\frac{2i}{4} = -\frac{i}{2} \end{aligned}$$

در نتیجه چنین حاصل می گردد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \left(-\frac{i}{2} \right) = -\frac{2\pi i^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

انتیگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz$ را به کمک قضیه ژاردان نیز می توان بررسی و آن را فورمول بندی کرد.
 قضیه ژاردان: فرض کنیم C_R روی قوس دایروی با شعاع R و مرکز z در نیم مستوی بالایی قرار داشته باشد و تابع $f(z)$ دارای شکل تحلیلی ذیل باشد:

$$f(z) = e^{itz} f(z) \quad t > 0.$$



اگر $f(z)$ در محور حقیقی تحلیلی بوده و در نیم مستوی بالایی دارای تعداد نهایی نقاط خاص باشد؛ ضمناً $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$ ، در این صورت رابطه به صورت ذیل ارائه می‌شود:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

واضح است که اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ نقاط خاص تابع $f(z)$ در نیم مستوی بالایی باشد، در آن صورت برای قدر کافی بزرگ R داریم:

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f(z))|_{z=a_k}$$

واضح است که برای $R \rightarrow \infty$ ، $x_2 \rightarrow \infty$ ، $x_1 \rightarrow -\infty$ ، و طبق قضیه ژاردان عبور حدی ذیل را برای $R \rightarrow \infty$ حاصل می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f(z))|_{z=a_k}$$

مسئله: با کاربرد قضیاً ژاردان انتیگرال غیرخاص $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 1} dx$ را بررسی می‌کنیم.

تابع $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 1}$ شرایط قضیه ژاردان برای $t = 1$ صدق می‌کند. در اینجا $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}$ بوده و نقاط خاص آن قطب ترتیب یک و یا جذرهای معادله

$$z^2 - 2z + 1 = 0.$$

می‌باشد. از اینجا $\Delta = 1 - 1 = -4$ ، $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \pm 2i$

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 1 - 2i$$

(نقاط z_1 و z_2 صفرهای ترتیب یک تابع $z^2 - 2z + 1 = 0$ است).

در نیم مستوی بالایی فقط یگانه نقطه خاص قطبی $z_1 = 1 + 2i$ قرار دارد.

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{res}(f(z))_{z=1+2i} &= \frac{ze^{iz}}{(z^2 - 2z + 1)'} \Big|_{z=1+2i} = \frac{ze^{iz}}{2z - 2} \Big|_{z=1+2i} = \frac{(1 + 2i)e^{i(1+2i)}}{2(1 + 2i) - 2} \\ &= \frac{(1 + 2i)e^{-2+i}}{2 + 4i - 2} = \frac{(1 + 2i)e^{-2+i}}{4i} \end{aligned}$$

و همچنان

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 2x + 1} dx &= \pi i \frac{(1 + \sqrt{3}i) e^{-\sqrt{3}+i}}{\sqrt{3}i} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3}i) e^i \\ &= \frac{\pi e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3}i)(\cos 1 + i \sin 1) = \frac{\pi e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} (\cos 1 + i \sin 1 + \sqrt{3}i \cos 1 - \sqrt{3} \sin 1) \\ &= \frac{\pi e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} ((\cos 1 - \sqrt{3} \sin 1) + i(\sin 1 + \sqrt{3} \cos 1)) = \\ &= \frac{\pi e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} (\cos 1 - \sqrt{3} \sin 1) + i \frac{\pi e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} (\sin 1 + \sqrt{3} \cos 1) \dots (*) \end{aligned}$$

از جانب دیگر

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 2x + 1} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos x + i \sin x)}{x^2 - 2x + 1} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 1} dx \end{aligned}$$

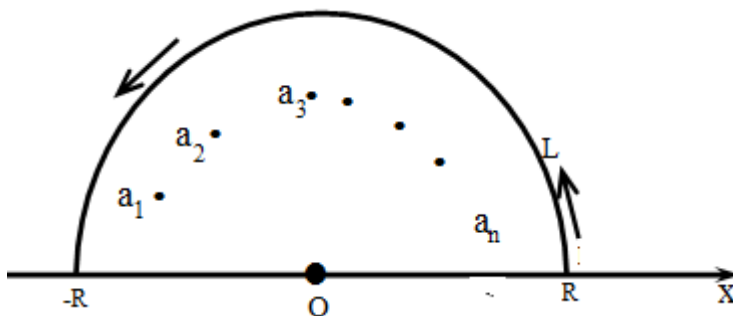
با در نظر داشت رابطه (*) داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 1} dx &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} (\cos 1 - i \sin 1) e^{-\sqrt{3}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 1} dx &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \cos 1 + \sin 1) \end{aligned}$$

قضیه ۱: فرض کنیم $f(z)$ در نیم مستوی بالایی به شمول محور حقیقی به استثنای نقاط خاص $a_1, a_2, \dots, a_n$ تحلیلی باشد، در این صورت نقاط خاص مذکور در نیم مستوی بالایی قرار دارند، بر علاوه $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^m}$ به تمام قیمت های $|z| \geq R$ است. در اینجا $m \geq 2$ و R عدد به قدر کافی بزرگ می باشد، در این صورت: (Zhang, ۲۰۲۳)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi i \sum_{i=1}^n \text{res} f(z) |_{z=a_i}$$

ثبوت: نیم دایره بالایی با شعاع R را که خلاف حرکت عقربه ساعت در حرکت است، رسم می کنیم؛ مرکز دایره در مبدأ مختصات قرار دارد؛ طوریکه تمام نقاط خاص تابع $f(z)$ در داخل نیم دایره L قرار گیرند.



(شکل ۳)

نظریه قضیه اساسی ریزیدو می توانیم بنویسیم:

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_L f(z)dz = \pi i \sum_{i=1}^n \text{res} f(z) \quad (II)$$

از این که به تمام قیمت ها رابطه $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^m}$, $|z| \geq R$ درست است.

بنابر این

$$\left| \int_L f(z)dz \right| \leq \frac{M}{R^m} \pi R = \frac{\pi M}{R^{m-1}} \quad (III)$$

$$m-1 \geq 1 \Rightarrow m \geq 2$$

از رابطه (III) برای $R \rightarrow \infty$ می توان نتیجه گرفت که:

$$\left| \int_L f(z)dz \right| = \frac{\pi M}{R^{m-1}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

در نتیجه رابطه ذیل حاصل می شود.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{res} f(z)$$

مسئله: انتیگرال غیر خاص $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\varepsilon}$ را بررسی می کنیم.تابع $f(z) = \frac{1}{1+z^\varepsilon}$ در نیم مستوی بالایی به استثنای نقاط a_1, a_2 تحلیلی می باشد.

$$a_1 = e^{i\frac{\pi}{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} (1+i), a_2 = e^{i\frac{3\pi}{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} (-1+i)$$

تابع $f(z)$ در نقاط a_1 و a_2 قطب ساده دارد. بر علاوه در نیم مستوی بالایی

$$\frac{1}{|1+z^\varepsilon|} = |f(z)| \leq \frac{1}{|z|^\varepsilon}$$

$$m = \varepsilon > 2$$

است. ریزیدوی تابع $f(z)$ را در نقاط a_1 و a_2 محاسبه می کنیم.

$$\text{res} f(z) = \frac{1}{\psi'(a_i)}, i = 1, 2, \dots$$

در اینجا $\psi(z) = 1+z^\varepsilon$ و $\psi'(z) = \varepsilon z^{\varepsilon-1}$ می شود، پس

$$\begin{aligned} \psi'(a_1) &= \varepsilon \cdot e^{i\frac{\pi}{\varepsilon}} = \varepsilon e^{i\frac{\pi}{\varepsilon}} = \varepsilon \left(\cos \frac{\pi}{\varepsilon} + i \sin \frac{\pi}{\varepsilon} \right) = \\ &= \varepsilon \left(\cos \left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \varepsilon 5^\circ \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \varepsilon 5^\circ \right) \right) = \varepsilon (-\sin \varepsilon 5^\circ + i \cos \varepsilon 5^\circ) \\ &= -\varepsilon (\sin \varepsilon 5^\circ - i \cos \varepsilon 5^\circ) = -\varepsilon (\cos(-\varepsilon 5^\circ) + i \sin(-\varepsilon 5^\circ)) = -\varepsilon e^{-i\frac{\pi}{\varepsilon}} \neq 0. \\ \psi'(a_2) &= \varepsilon \cdot e^{i\frac{3\pi}{\varepsilon}} = \varepsilon e^{i\frac{3\pi}{\varepsilon}} = \varepsilon \left(\cos \frac{3\pi}{\varepsilon} + i \sin \frac{3\pi}{\varepsilon} \right) = \\ &= \varepsilon (\cos(\pi + \varepsilon 5^\circ) + i \sin(\pi + \varepsilon 5^\circ)) = \varepsilon (\cos \varepsilon 5^\circ + i \sin \varepsilon 5^\circ) = \varepsilon e^{i\frac{\pi}{\varepsilon}} \neq 0. \end{aligned}$$

به این ترتیب:

$$\text{res} f(a_1) = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{\varepsilon}}} = -\frac{1}{\varepsilon} e^{i\frac{\pi}{\varepsilon}}$$

$$\operatorname{resf}(a_r) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{\varepsilon}}} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\frac{\pi}{\varepsilon}}$$

حاصل عملیه قرار ذیل است:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\varepsilon} &= 2\pi i \left[-\frac{1}{\varepsilon} e^{i\frac{\pi}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\frac{\pi}{\varepsilon}} \right] = \frac{i2\pi i}{i^\varepsilon} \left[-e^{i\frac{\pi}{\varepsilon}} + e^{-i\frac{\pi}{\varepsilon}} \right] = \pi \left[\frac{e^{i\frac{\pi}{\varepsilon}} - e^{-i\frac{\pi}{\varepsilon}}}{2i} \right] \\ &= \pi \cdot \sin \frac{\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

قضیه ۲: فرض می‌کنیم تابع $w = f(z)$ در نیم مستوی بالایی به‌شمول محور حقیقی به استثنای نقاط خاص نهایی $a_1, a_2, \dots, a_n$ که در نیم مستوی بالایی قرار دارند، تحلیلی باشد (Huang, ۲۰۲۴). ضمناً

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

است، در این صورت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{resf}(a_i)$$

ثبوت: از این‌که تابع $f(x) = e^{iz}$ دارای همان نقاط خاصی می‌باشد که تابع $f(z)$ در قضیه ۱ دارد. بناء نظر به قضیه مذکور می‌توانیم بنویسیم که:

$$\int_{-R}^{+R} f(x)e^{-ix} dx = \int_L f(x)e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{resf}(a_i)e^{ia_j} = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=a_j} f(z)e^{iz}$$

باید خاطر نشان ساخت که در صورت تقرب $R \rightarrow \infty$ انتگرال $\int_L f(z)e^{iz} dz$ به طرف صفر تقرب می‌کند. با وضع $z = Re^{i\varphi}$ داریم:

$$dz = i Re^{i\varphi} d\varphi$$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= e^{i Re^{i\varphi}} = e^{iR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = e^{R(i \cos \varphi - \sin \varphi)} = e^{iR(\cos \varphi - \frac{1}{i} \sin \varphi)} \\ &= e^{iR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \end{aligned}$$

$$e^{iz} = e^{iR \sin \varphi} \cdot e^{iR \cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_L f(z)e^{iz} dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) e^{-R \sin \varphi} \cdot e^{iR \cos \varphi} \cdot i Re^{i\varphi} d\varphi \right| \\ &\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\varphi})| \cdot |e^{-R \sin \varphi}| \cdot |e^{iR \cos \varphi}| \cdot |iR| |e^{i\varphi}| \cdot \left| \int_0^\pi |f(Re^{i\varphi})|^{-R \sin \varphi} d\varphi \right| \end{aligned}$$

نظربه شرط قضیه $|f(Re^{i\varphi})| \leq \varepsilon$ به تمام قیمت‌های $0 \leq \varphi \leq \pi$ صدق می‌کند، بنا براین به قیمت های $\sin \varphi > \frac{\varphi}{\pi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ بوده و

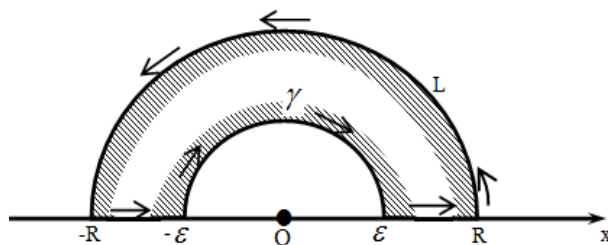
$$\begin{aligned} A &\leq \varepsilon \int_0^\pi Re^{-R \sin \varphi} d\varphi = 2\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-R \sin \varphi} d\varphi \leq 2\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\frac{2R\varphi}{\pi}} d\varphi = \left(\frac{2R\varepsilon}{\pi} = 1 \right) \\ &= \varepsilon \pi \int_0^R e^{-t} dt = \pi \varepsilon (1 - e^{-R}) < \pi \varepsilon \end{aligned}$$

به این ترتیب در صورت تقرب $A \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx = \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res} f(z)e^{iz}|_{z=a_j}$$

اگر تابع $f(z)$ در روی محور حقیقی نقاط خاص داشته باشد، در این صورت با ساختار مشخص دوره انتیگرال گیری، می توان انتیگرال مربوطه را بررسی کرد. مسئله: تابع به صورت $f(z) = \frac{1}{z}$ داده شده است. این تابع روی محور حقیقی دارای قطب ساده $z = 0$ بوده ضمناً $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$ طور یکنواخت نظریه $\arg z = \varphi$ می باشد.

دوره انتیگرال گیری را طوری که در شکل (۴) نشان داده شده است، تشکیل می کنیم، جهت دور نیز در شکل تعیین شده است.



(شکل ۴)

در ساحه خط شده تابع $\frac{e^{iz}}{z}$ به تمام قیمت های R و ϵ تحلیلی است به این سبب نظر به قضیه کوشی داریم:

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_L \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (IV)$$

نیم دایره γ مطابق حرکت عقربه ساعت جهت دارد.

طوری که در بالا نشان داده شد،

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_L \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (V)$$

همچنان با قرار دادن $z = \epsilon e^{i\varphi}$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 e^{i\epsilon(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \cdot \frac{i\epsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\epsilon e^{i\varphi}} = \\ &= i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 e^{i\epsilon(\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi = i \int_{\pi}^0 d\varphi = \pi i \end{aligned}$$

به این ترتیب از رابطه (IV) می توان به دست آورد که:

$$\begin{aligned} \pi i &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{-ix}}{x} dx + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = -\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{-ix}}{x} dx + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} 2i \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx = 2i \int_0^R \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx \\ &= 2i \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \pi i \end{aligned}$$

از اینجا:

$$\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

از این که تابع $\frac{\sin x}{x}$ جفت است، در نتیجه قیمت ذیل حاصل می شود.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

تبصره: اگر تحت علامه انتیگرال مضرب $\sin x$ و یا $\cos x$ وجود داشته باشد، در این صورت بهتر است انتیگرال توابع $\sin x$ و یا $\cos x$ را به انتیگرال e^{iz} تبدیل کرد. زیرا $|\sin z|$ و $|\cos z|$ در صورت تقرب $z \rightarrow \infty$ نامحدود تزايد می کنند. اما تابع $|e^{iz}| = e^{-y} \rightarrow 0$ (وقتی که $y \rightarrow \infty$)، $y > 0$).

در این صورت

$$\begin{aligned} |e^{iz}| &= |e^{i(x+iy)}| = |e^{ix} \cdot e^{-y}| = |e^{ix}| \cdot |e^{-y}| = \\ &= |\cos x + i \sin x| |e^{-y}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} e^{-y} = 1 \cdot e^{-y} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

یعنی روش توابع $\sin z$ و $\cos z$ با روش تابع $f(z)$ تفاوت دارند. بعد از تبدیل و محاسبه انتیگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$ قسمت حقیقی و مختلط آنرا جدا کرده به دست می آوریم که انتیگرال های

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x dx$$

مساوی به چه میشوند.

مسئله: انتیگرال غیر عادی $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2 + x^2} dx$ ($a > 0$) را بررسی می کنیم.

تابع $f(z) = \frac{e^{iaz}}{a^2 + z^2}$ را در نظر میگیریم. تابع مورد نظر در نیم مستوی بالایی به استثنای نقطه $z = ai$ تحلیلی است. تابع

$$f(z) = \frac{1}{a^2 + z^2}$$

در صورت تقرب $z \rightarrow \infty$ نظر به $\arg z = \varphi$ طور یکنواخت به صفر تقرب می کند.

به این ترتیب نظریه قضیه ۲ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{a^2 + x^2} dx &= 2\pi i \operatorname{res} \frac{e^{iaz}}{a^2 + z^2} \Big|_{z=ai} = 2\pi i \frac{e^{iaai}}{(a^2 + z^2) \Big|_{z=ai}} = \\ &= 2\pi i \frac{e^{-a^2/a}}{2ai} = 2\pi i \frac{e^{-aa}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{aa} \end{aligned}$$

مسئله: انتیگرال غیر عادی $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$ را بررسی می کنیم.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos^2 x}{2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \arctan \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot e^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} e^{-2} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

در نتیجه به دست می آید که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2})$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله مروری روش‌های محاسبه انتیگرال‌های غیرخاص با استفاده از قضیه ریزیدو در تحلیل مختلط مورد بحث و بررسی قرار گرفته و با استفاده از قضیه ریزیدو نشان داده شده است که چگونه می‌توان انتیگرال‌های دارای نقاط خاص را از طریق محاسبه ریزیدوهای تابع در این نقاط ارزیابی کرد. همچنان قضیه ژاردان به عنوان ابزار مفید و موثر برای محاسبه انتیگرال‌های که شامل توابع نمایی و کسری هستند، معرفی گردیده است. مسائل ارائه‌شده و بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که روش‌های مبتنی بر تحلیل مختلط از جمله روش قضیه ریزیدو دارای دقت بالا و موثریت بیشتر در بخش‌های مختلف از مسائل ریاضیات هستند. علاوه بر این استفاده از مسیرهای بسته در صفحه مختلط و تعیین ریزیدوها، مراحل حل بسیاری از انتیگرال‌های پیچیده و چالش برانگیز را آسان می‌کند و امکان تعمیم روش‌های عددی و تحلیلی را برای محاسبه انواع گسترده‌ای از انتیگرال‌های حقیقی و مختلط فراهم می‌کند. نتایج حاصل از این بررسی می‌تواند به عنوان اساس برای مطالعه و حل انتیگرال‌های غیرخاص در مسائل مختلف ریاضیات به صورت تطبیقی مورد استفاده قرار گیرد.

منابع

- Arpasi, J. P. (2024). Computing Some Principal Value Integrals without Residues and Applications on Hilbert Transform and Fourier Transform. *arXiv preprint arXiv:2404.02664*.
- Brown, T. (2023). Exploring the link between improper integrals and Fourier transforms. *Journal of Fourier Analysis*, 17(1), 75-92.
- Cain, G. (2023). The role of contour integration in solving improper integrals. *International Journal of Mathematical Applications*, 58(1), 89-105.
- Carter, J. (2024). The significance of poles and residues in evaluating improper integrals. *Advanced Studies in Mathematics*, 14(2), 34-49.
- Chen, W.-X. (2024). Advanced applications of the residue theorem in complex analysis: Derivatives, loop integrals, and root structures. *Cambridge Open Engage*. <https://www.cambridge.org/engage/coe/article-details/672d41bf7be152b1d061f853>
- Dai, N., & Zhang, Y. (2021). Applying residue theorem to compute real definite integral. *Journal of Physics: Conference Series*, 1903(1), 012022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1903/1/01202>
- Esmaeili, S. (2022). Constructing Polynomial Approximations Using Least Squares Approach. *University of Kurdistan*.
- Fernandez, L. (2024). Contour integration methods for evaluating definite and improper integrals. *Mathematical Reviews*, 29(3), 512-526.
- Gomez, R. (2023). A review on contour integration and residue calculus. *Journal of Pure and Applied Mathematics*, 51(5), 310-328.

- Guo, Y., & Liu, J. (2024). The Residue Theorem Approach to Compute Definite Integrals. *Higher Education Studies and Evaluation*, 11(3), 45-53.
- Huang, L. (2024). A novel approach to improper integral evaluation using contour methods. *Applied Mathematical Techniques*, 33(2), 180-198.
- Huang, Z., Jin, Y., Yang, M., & Yuan, Y. (2023). On the calculation of several definite integrals by residue theorem. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 38, 317-322. <https://drpress.org/ojs/index.php/HSET/article/view/5823>
- Labora, D. C., & Labora, G. C. (2024). An Approach to Borwein Integrals from the Point of View of Residue Theory. *arXiv preprint arXiv:2407.15856*.
- Lee, S., & Kim, H. (2023). Integration techniques for solving singular integrals. *Asian Journal of Mathematical Analysis*, 25(3), 150-168.
- Marsden, J., & Hoffman, M. (2013). Basic Complex Analysis (4th ed.). *Freeman*.
- Milgram, M. (2024). An Extension of Glasser's Master Theorem and a Collection of Improper Integrals Many of Which Involve Riemann's Zeta Function. *arXiv preprint arXiv:2402.17586*.
- Nakamura, T. (2023). Applications of complex analysis in physics and engineering. *Physics and Mathematics Journal*, 62(2), 78-92.
- Patel, N., & Singh, R. (2024). Evaluating real integrals using complex methods. *Indian Journal of Mathematics*, 29(2), 105-119.
- Privalov, I. (2023). Residue theorem and its applications in complex analysis. *Journal of Mathematical Studies*, 45(2), 123-140.
- Sanchez, M. (2024). Techniques in complex function theory for evaluating definite integrals. *European Mathematical Review*, 45(3), 210-225.
- Shah, R., & Kumar, D. (2024). Advances in complex function theory and residue calculus. *Applied Mathematics and Computation*, 276, 1452-1470.
- Sousa, J. M. (2023). Applications of Residues and Poles in Solutions of Some Improper Integrals Evaluation. *arXiv preprint arXiv:2310.13749*.
- Wang, P. (2024). Improper integrals and the residue theorem: A computational approach. *Computational Mathematics Journal*, 39(1), 67-85.
- White, P. (2023). The impact of the residue theorem on advanced calculus. *Calculus and Analysis Journal*, 28(4), 400-415.
- Zhang, H. (2023). Application of Cauchy's residue theorem in several improper integrals. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 72, 949-956. <https://drpress.org/ojs/index.php/HSET/article/view/13506>
- Zhang, X. (2023). On evaluating improper integrals using Cauchy's residue theorem. *Mathematics Today*, 34(4), 230-245.



Two quarterly

Ainak Academic- Research Journal



Logar Higher Education Institute

Journal license date: June/2023

Study of Improper Integrals and Their Calculation Using Residue Theorem

Sayed Abdul Bashir Osmani

1. Department of Algebra, Faculty of Mathematics, Kabul University.
Email: bashirosmani11@gmail.com

ABSTRACT

Improper integrals, as one of the fundamental topics in both applied and theoretical mathematics, play a significant role in solving complex mathematical problems. In this review article, various methods for evaluating these integrals are examined based on different sources, and their practical applications in various branches of mathematics are analyzed. One of the effective approaches for solving such integrals is the use of the Residue Theorem in complex analysis, which enables the evaluation of integrals by utilizing the residues of functions at specific singular points. The article begins by introducing the fundamental concepts of complex analysis, followed by a detailed explanation of the method for calculating improper integrals through the Residue Theorem. Subsequently, several practical problems are presented, and the precise formulation of different methods are discussed and analyzed. The findings indicate that the use of the Residue Theorem facilitates the calculation of various improper integrals, particularly those with singularities. Moreover, the Cauchy and Jordan theorems have also been employed to enhance the accuracy of integral calculations.

Keywords: Analytic Function, Improper Integrals, Residue Theorem, Singular Points.

Cite this article: Osmani, Sayed Abdul Bashir. (2025). Study of Improper Integrals and Their Calculation Using Residue Theorem. Ainak Academic – Research Journal (two Quarterly), 2(4): 6-18.

Logar Higher Education Institute

© The Author(s).
