کاربرد سلسله فوریه در سرکت دو حلقه جریان برق مستقیم

پوهنیار عبدالصبور فیضی[۱]، پوهنمل محمدرحیم رحیمی[۲]

[۱،۲] دیپارتمنت ریاضی، پوهنځی تعلیم و تربیه، مؤسسۀ تحصیلات عالی لوگر.
ایمیل آدرس: Abdulsaboorfaizi32@gmail.com

خلاصه

نظریه سلسله‌های فوریه نسبتاً پیچیده ولی کاربردهای آن ساده است. سلسله‌های فوریه، کلی‌تر از سلسله‌های تایلور- مکلورن می‌باشد، زیرا بسیاری از توابع متناوبی که کاربردهای عملی دارند قابل بسط به سلسله فوریه‌اند ولی بسط سلسله تایلور- مکلورن را ندارند. سلسله‌های فوریه در بخش‌های مختلف علوم و انجینری ازجمله علوم میکانیک، مخابرات، عکاسی، کودگذاری و محاسبه سرکت های برقی نقش عمده‌ای را ایفا می‌نماید. در رشته انجینری برق تمام گیرنده‌ها و فرستنده‌ها و پخش‌کننده‌های امواج الکترونیکی به اساس سیگنال‌های با توابع ساین و کوساین ازجمله سلسله فوریه کار می‌کند، در این مقاله اطلاعات به روش تحلیل اسنادی گردآوری‌شده. سرکت های برقی را می‌توان توسط روش‌های مانند قواعد کریشوف، پتانسیل گره، جریان حلقه و سلسله فوریه حل کرد. در این مقاله؛ سرکت برقی جریان مستقیم را به‌صورت دو حلقه جریان متناوب تجزیه نموده و با استفاده از سلسله فوریه به‌صورت مجموعی از جریان‌های متناوب با فریکونسی های مختلف تجزیه گردید، درنتیجه مقدار جری $i_0(t)$ آن‌یک سرکت برقی با ولتاژ $V(t)$ را با سلسله فوریه تقریب زده و توسط عملیات ریاضیکی آن‌ها محاسبه نمودیم، این روش به دلیل سادگی و دقت بالای خود، در تحلیل سرکت های برقی کاربرد فراوان دارد.

کلمات کلیدی: تبدیل فوریه، سرکت های برقی، سلسله فوریه.

مقدمه

سرکت های برقی نوعی از سرکت های هستند که از یک منبع جریان یا ولتاژ و عناصر خطی همانند مقاومت تشکیل می‌شوند، اگر قطعات تشکیل‌دهنده یک مدار الکترونیکی باشد، چنین مدار را بنام مدار الکترونیکی یا سرکت های برقی گویند. سرکت های برقی به دو نوع (سرکت دیجیتالی و آنالوگ) تقسیم‌بندی گردیده است.

سرکت های دیجیتالی بخش از سرکت های الکترونیکی است که سیگنال‌های دیجیتالی و دستگاه‌های دیجیتالی را استفاده یا تولید می‌کند هم‌چنین سرکت های آنالوگ به بررسی و طراحی سیستم‌های الکترونیکی می‌پردازد که با سیگنال‌های آنالوگ کار می‌کنند، برخلاف سیستم‌های الکترونیک دیجیتالی که با سیگنال‌های دیجیتالی (که قسمت دامنه آن‌ها تنها دو سطح دارد) کار می‌کنند

و مباحثی مانند طراحی تقویت‌کننده‌ها، طراحی منابع تغذیه، طراحی فلتر ها همگی در سرکت های الکترونیکی آنالوگ مطرح می‌شوند هم‌چنین موارد دیگری مانند موتورها، ماشین‌های دوران کننده، امواج، صوت، حرکت زمین و ضربان قلب در شرایط عادی و غیره. در چنین مواردی نمایش توابع دورهای متناظر برحسب توابع دورهای ساده، یعنی توابع ساین و کوساین، ازنظر علمی اهمیت زیادی دارد. معرفی این سلسله‌ها توسط فوریه، یکی از مهم‌ترین رویدادهای تاریخی در ریاضیات کاربردی بوده است. اساسی‌ترین کاربردها را در این زمینه آنالیز فوریه دارد؛ یعنی در حل مسائل مقدار مرزی و اولیه در میخانیک، جریان گرما، الکترواستاتیک و سایر بخش‌های انجینری برق(Hasan, Al-Amin, & Owaziuddin, 2019). نظریه سلسله‌های فوریه از نظریه سلسله‌های مثلثاتی که برای اولین بار در ۱۸۲۲، دریک کتاب توسط فوریه به چاپ رسیده؛ منشأ گرفته است. تحقیقات چندین ساله فوریه به گسترش نظریه اساسی این سلسله‌ها منجر گردید که امروزه به نام خو وی معروف و از اهمیت فوق‌العاده در ریاضیات، علم و تخنیک برخورداراست. در ریاضیات با استفاده از سلسله فوریه می‌توان هر تابع متناوب را به‌صورت جمعی از توابع نوسانی ساده مانند تابع ساین و کوساین یا تابع‌نمایی (مختلط) نوشت این تابع به نام ریاضیدان بزرگ فرانسوی، ژوزف فوریه نام‌گذاری شده است. از سال ۱۹۵۰ رشته الکترونیک به‌عنوان «تکنالوژی رادیویی» شناخته می‌شد و کاربرد اصلی آن در طراحی و تئوری گیرنده‌ها و فرستنده‌های رادیویی بود(Grafakos,2014).

این تحقیق به هدف بررسی کاربرد سلسله فوریه در سرکت دو حلقه جریان برق مستقیم صورت گرفته است، برای استفاده از سلسله فوریه در سرکت برقی دو حلقه جریان برق مستقیم، می‌توان از معادلات کریستوف و قوانین کریشهوف، پوتانشیل گره نیز استفاده کرد ولی مؤثریت استفاده از حلقه جریان مستقیم با استفاده از سلسله فوریه به دلیل دقت بالای خود می‌باشد.

سلسله فوریه

فوریه ریاضی‌دان و زمان ناپلیون (۱۸۳۰-۱۷۶۸) نخستین کسی بود که نظریه تحلیل فوریه را در کتاب مشهور خود درزمینهٔ انتقال حرارت در سال ۱۸۲۲ بیان کرد یکی از نتایج حیرت‌انگیز در این کتاب حکم او که (هر تابع را می‌توان با یک مجموعه نامحدود از جملات ساین و کوساین نمایش داد). سلسله فوریه به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.(Grafakos, L., 2014)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].\ n = 1.2.3. \ldots$$

که در آن

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.\ n = 1.2.3. \ldots$$

ضرایب فوریه می‌باشد(Lange & Lange, 2022).

مثال: سلسله فوریه تابع متناوب f(x) زیر را دریافت نمایید.

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x \le 0. \\ x^2, 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ضرایب فوریه سلسله زیر را دریافت می‌نماییم.

توجه: برای راحتی، به‌جای a_0 از $\frac{a_0}{2}$ استفاده می‌نماییم.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)] \quad (۱)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos(nx)\,dx \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cdot\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin(nx)}{n} - (2x)\frac{-\cos(nx)}{n^2} + 2\left(\frac{-\sin(nx)}{n^3}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n^2}\cos(n\pi) = \frac{2}{n^2}(-1)^n.\ n = 1.2.3. \ldots \end{aligned}$$

به‌طور مشابه ضریب b_n را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin(nx)\,dx \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cdot\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{-\cos(nx)}{n} - (2x)\frac{-\sin(nx)}{n^2} + 2\left(\frac{cos(nx)}{n^3}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi^2}{n}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^3}(\cos(n\pi - 1)\right] \\ &= \frac{-\pi}{n}(-1)^n + \frac{2}{\pi n^3}[(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

با قرار دادن a_0، a_nو b_n در (۱)، سلسله فوریه تابع $f(x)$ را در انتروال $[-\pi.\pi]$ به دست می آوریم(Hasan et al., 2019):

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]\right\}\sin(nx)$$

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه به اسم ریاضیدان فرانسوی ژوزف فوریه، نامیده شده است و یک تبدیل انتگرالی است که هر تابع $f(t)$ را به یک تابع دیگری مانند $F(W)$ منعکس می‌کند. در این صورت، به $F(w)$تبدیل فوریه تابع $f(t)$می‌گویند. حالت خاص تبدیل فوریه، سلسله فوریه نام دارد و آن زمانی کاربرد دارد که تابع $f(t)$متناوب،باشد، یعنی به‌صورت $f(t+T) = f(t)$باشد(Hasan et al., 2019). چنانچه تابع متناوب نباشد و یا به‌عبارتی‌دیگر، تناوب آن برابر بی‌نهایت باشد $T \rightarrow \infty$، از سلسله فوریه به‌راحتی، عبارت زیر به دست می‌آید:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$

تبدیل فوریه و به همراه آن آنالیز فوریه، در مباحث مختلف فزیک، ازجمله الکترونیک و الکترومغناطیس به‌خصوص در پیغام‌رسانی و مخابرات، آکوستیک، فزیک امواج و غیره کاربرد فراوان دارد(Hasan et al., 2019). تبدیل فوریه در سرکت های الکترونیکی، سیگنال‌های الکترونیکی را به ترکیبی از سیگنال‌های با توابع ساین و کوساین با فریکونسی های مختلف تجزیه می‌نماید و از این طریق اطلاعات بیشتری درباره سیگنال به دست آورد(Howe, 1980).

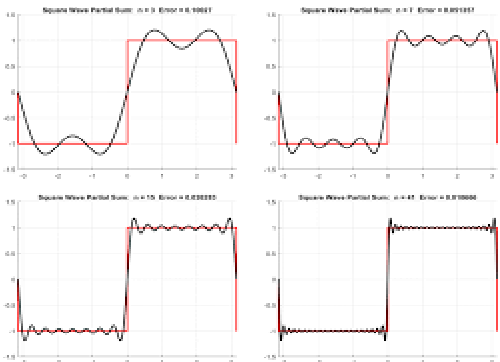
کاربرد سلسله فوریه در محاسبه سرکت دو حلقه جریان برق مستقیم

ازآنجایی‌که در رشته انجینری برق تمامی گیرنده‌ها، فرستنده‌ها و پخش‌کننده موج‌بر مبنای سیگنال‌های با توابع ساین و کوساین کار می‌کنند، اینگره ها نیاز به سیگنال‌هایی به شکل تابع ساین و کوساین دارند یعنی تقریباً سیگنال‌های خارج از این فرم را نمی‌شناسند. ولی در عمل سیگنال‌ها بنا به دلایلی به فرم توابع ساین و کوساین نیستند. برای مثال سیگنال‌های فرستاده‌شده از یک ماهواره‌ی فضایی به دلیل نویزهای موجود در سر راه اعم از نور خورشید، میدان مقناطیسی حاصل از جاذبه‌ی زمین، میدان

مقناطیسی های ایجادشده توسط دست بشر در اتمسفر، طوفان‌های هوایی و غیره دچار مشکلاتی اعم از گسستگی، تعریف‌نشدگی، مشتق ناپذیری و غیره می‌شود و درحالی‌که سیگنالی با این شرایط برای مدارات الکترونیکی گیرنده‌ها و پخش‌کننده‌ها قابل‌فهم نیست. برای حل این‌چنین مشکلات از سلسله فوریه استفاده می‌کنیم. اصل عمل سلسله فوریه با استفاده از تقریب زدن می‌باشد یعنی با داشتن اصل خود سیگنال دریافتی، سیگنال جدیدی شبیه به آن سیگنال تقریب می‌زنیم. سلسله فوریه در کل به فرم زیر می‌باشد:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

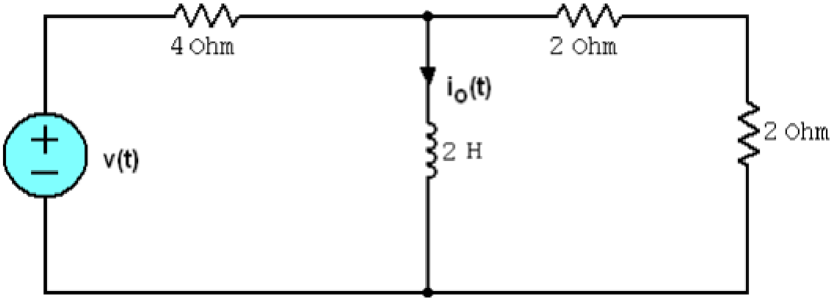
در سلسله فوریه اولین تقریبی که زده می‌شود تقریب a_0 می‌باشد یعنی فارغ از هرگونه اطلاعات سیگنال فقط میانه سیگنال اصلی در نظر گرفته می‌شود. تقریب بعدی توسط اولین جمله ابتدایی با تابع کوساین یعنی a_1 انجام می‌پذیرد که در این حالت سیگنال تقریب زده‌شده سوار سیگنال اصلی می‌شود که در سلسله فوریه هرقدر با میل کردن به سمت بی‌نهایت در جملات سلسله این تقریب با افزایش فریکونسی و کاهش دامنه‌ی شکل موج تقریب زده‌شده درنهایت شکل موج شبیه سیگنال اصلی می‌شود. از طرفی دیگر چون سلسله‌های فوریه تقارب سریع‌تری دارند در چند جمله اول سیگنال تقریب زده‌شده به سیگنال اصلی نزدیک می‌شود. بدین ترتیب تمامی مشکلات موجود در سیگنال دریافتی توسط سلسله فوریه حل می‌شود و این سیگنال تقریب زده‌شده قابل‌استفاده برای گیرنده‌ها و پخش‌کننده‌های انرژی برقی می‌باشد. این جریان در شکل (۱) نشان داده‌شده است:



شکل ۱. جریان سیگنال سرکت برقی

حقیقت گیرنده‌ها و پخش‌کننده‌های انرژی برقی در سرکت دو جریان مستقیم توسط مثال زیر توضیح می‌گردد(Folland, 2009).

مثال ۱: با استفاده از شکل زیر مقدار $i_0(t)$ را در صورت ولتاژ وردی $V(t)$ توسط سلسله فوریه $v(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2}(\cos nt + n \sin nt)$ مشخص گردیده، به دست آورید(Sneddon, 1995).



شکل۲. ولتاژ ورودی وخروجی سرکت برقی (Sneddon, 1995).

حل: تابع ولتاژ ورودی را بازنویسی می‌کنیم،

$$v(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1+n^2}\cos nt - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1+n^2} n \sin nt$$

و تابع ولتاژ ورودی را با استفاده از رابطه فوق به شکل فاز امپلیتود تبدیل می‌کنیم.

بنابراین، $A = \frac{2(-1)^n}{1+n^2}$ و $B = -\frac{2(-1)^n n}{1+n^2}$. فازی $A_n = \sqrt{A^2+B^2} =$. $\emptyset_n = -\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) = \tan^{-1} n$، ولتاژ داخلی $v(t)$ بعدازآن با $v(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}}(\cos nt + \tan^{-1} n)$ برابر خواهد شد. شکل فازور $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}}\angle \tan^{-1} n$ است. از معادله $\omega = 1\frac{rad}{s}$ و $\omega_n = n\frac{rad}{s}$ تمام مقاومت سرکت،

$$Z = 4 + j\omega_n 2 \parallel 4 = 4 + \frac{j\omega_n 8}{4 + j\omega_n 8} = \frac{8 + j\omega_n 8}{2 + j\omega_n}$$

است و جریان که در سرکت جریان پیدا می‌کند، $I = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n\angle\tan^{-1} n}{\sqrt{1+n^2}}\right].\frac{2+j\omega_n}{8+j\omega_n 8}$ خواهد بود. جریان خروجی $i_0(t) = \frac{4}{4+j\omega_n 2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n\angle\tan^{-1} n}{\sqrt{1+n^2}}\right].\frac{2+j\omega_n}{8+j\omega_n 8} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n\angle\tan^{-1} n}{\sqrt{1+n^2}}\right]\frac{1}{4+j\omega_n 4}$ می‌باشد. با تنظیم $\omega_n = 0$ جریان DC، $\frac{1}{4+j\omega_n 4} = \frac{1}{4+j0\times 4} = \frac{1}{4}$ و مؤلفه AC، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n\angle\tan^{-1} n}{\sqrt{1+n^2}}.\frac{1}{4+jn4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n\angle\tan^{-1} n}{\sqrt{1+n^2}.4\angle\tan^{-1} n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{1+n^2}}$ خواهند شد.

در شکل دامنه زمانی، مؤلفه‌ای (AC) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{1+n^2}}\cos nt$ است. بنابراین، جریان $i_0(t)$، مساوی است به:

$$i_0(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{1+n^2}}\cos nt \text{ A}$$

نتیجه‌گیری

سلسله فوریه یکی از کاربرد تبدیل فوریه بوده که با استفاده از آن‌یک سیگنال زمانی را به‌صورت مجموعه‌ی از توابع ساین و کوساین با فریکونسیهای مختلف نشان داد، در سرکت های برقی سلسله فوریه برای تحلیل سیگنال‌های الکترونیکی و تعیین اجزای فریکونسی آن‌ها استفاده می‌گردد، این کاربرد سلسله فوریه در تحلیل سرکت های برقی به دلیل اینکه بسیاری از سیگنال‌های برقی به‌صورت ترکیبی از سیگنال‌های با فریکونسی های مختلف هستند، بسیار مفید می‌باشد. هم‌چنین در این مقاله سلسله فوریه به‌عنوان یکی از کاربر تبدیل فوریه آورده شده است که یک تابع زمانی را به تبدیل فریکونسی تبدیل می‌کند. برای محاسبه مقدار جریان $i_0(t)$ یک سرکت برقی با ولتاژ $V(t)$ که نشان‌دهنده تابع جریان می‌باشد، تابع جریان توسط یک سلسله فوریه نشان داده‌شده است، سرکت برقی جریان دو حلقه مستقیم به‌صورت دو حلقه جریان متناوب تجزیه گردید و با استفاده از سلسله فوریه به‌صورت مجموعی از جریان‌های متناوب با فریکونسی های مختلف تجزیه شد، درنتیجه مقدار جریان $i_0(t)$ سرکت برقی را با ولتاژ $V(t)$ و توسط سلسله فوریه محاسبه نمودیم، روش سلسله فوریه به دلیل سادگی و دقت بالای خود، در تحلیل سرکت های برقی کاربرد فراوان دارد، برای تحقیقات بعدی پیشنهاد می‌گردد که با استفاده از سلسله فوریه مقدار جریان فوق‌الذکر را در سرکت چندین حلقه جریان برق مستقیم موردبررسی قرار گرد.

منابع

Grafakos, L., & Grafakos, L. (2014). Fourier series. *Classical Fourier Analysis*, 173-240.

Folland, G. B. (2009). *Fourier analysis and its applications* (Vol. 4): American Mathematical Soc, 135-150.

Hasan, A., Al-Amin, M., & Owaziuddin, M. (2019). Applications of fourier series in electric circuit and digital multimedia visualization signal process of communication system, vol. 4. *American Institute of Sciencie*, 72-80 .

Howe, R. (1980). On the role of the Heisenberg group in harmonic analysis, 473-481 .

Lange, J., & Lange, T. (2022). Fourier series. In *Fourier Transformation for Signal and System Description: Compact, Visual, Intuitively Understandable* (pp. 9-19): Springer.

Nilsson, J. W., & Susan, A. (2001). Riedel, Electric Circuits. In: Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall.

Potts, D., Steidl, G., & Tasche, M. (2001). Fast Fourier transforms for nonequispaced data: A tutorial. *Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications*, 247-270 .

Sneddon, I. N. (1995). *Fourier transforms*: Courier Corporation, Dover Publications, Ins. New york,71-92.

Strick, H. K., & Strick, H. K. (2020). Jean Baptiste Joseph Fourier–von der Französischen Revolution zur Revolution der Wärmelehre. *Mathematik–einfach genial! Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Cantor*, 323-336 .

Wei, D., & Yang, J. (2022). Non-Uniform Sparse Fourier Transform and Its Applications. *IEEE Transactions on Signal Processing, 70*, 4468-4482.

Application of the Fourier series in the electronic circuit of direct current.

Abdulsaboor faizi[1] & Mohammad Rahim Rahimi[2]

[1,2] Mathematics Department, Education Faculty, Logar Institute of Higher Education.

Email: Abdulsaboorfaizi32@gmail.com

Abstract

Although the Fourier series theory is quite complex, its applications are straightforward because many of the basic functions of practical applications can be reduced to the Fourier series but not the Taylor-McLaren series. The Fourier series is more frequently used than the Taylor-McLaren series. A number of scientific and engineering disciplines, including mechanical science, communications, photography, coding, and electronic circuit computing, heavily rely on the Fourier series. All receptors, transmitters, and electronic wave processors in electrical engineering operate on signals with some trigonometric functions, including the Fourier series. The analysis approach is used to gather the data for this article. Electronic circuits can be solved by Kirchhoff's, electrostatic potential, and Fourier series. The direct current electric circuit was decomposed into two alternating current circuit, and using the Fourier series, it was analyzed as a whole of alternating currents with different frequencies. As a result, the value of current i(t) in an electronic circuit with voltage V(t) is approximated using the Fourier series and calculated through mathematical operations. In this article, the electronic circuit divided the direct flow into two rectangular flow rings and distributed the total of alternating currents with different frequencies using a series of phases. This technique has many uses in the analysis of electrical circuits since it is straightforward and highly accurate.

Key words: February Transform, Electrical circuits , Fourier series.