بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی مستقل از زمان

پوهنمل عبدالمنیر خیرزاده

دیپارتمنت ریاضی، پوهنځی تعلیم و تربیه، مؤسسهٔ تحصیلات عالی پنجشیر.

ایمیل آدرس: abdulmunirkhirzada@yahoo.com

خلاصه

تحلیل و تجزیه پایداری انواع سیستم‌های غیرخطی، حتی سیستم‌های غیرخطی مستقل از زمان در اغلب موارد بسیار مشکل و یا حتی غیرممکن می‌باشد. در این مقاله بررسی پایداری نقاط تعادل سیستم‌های غیرخطی مستقل از زمان ارائه گردید، پایدارسازی نقاط تعادل ناپایدار سیستم‌های دینامیکی یک از موضوعات بسیار مهم و اساسی می‌باشد. زیرا سیستم ناپایدار عموماً بی‌فایده و بالقوه خطرناک است. در این تحقیق پایدارسازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی مستقل از زمان به دو روش یکی روش لیاپانوف و دیگری روش کنترول لغزشی بررسی گردیده است. روش‌های پایداری لیاپانوف به تجزیه‌وتحلیل نقاط تعادل به روش‌های کراسوفسکی و گرادیان متغیر برای تولید توابع لیاپانوف پرداخته است. توابع لیاپانوف در بیش از صدسال گذشته برای تحلیل پایداری سیستم‌های غیرخطی، در ریاضیات و کنترول موردتوجه بیشتر قرارگرفته است. امروزه بدون شک توابع لیاپانوف ابزار اصلی در آنالیز پایداری در طراحی و کنترول سیستم هستند. یکی از روش‌های مؤثر و جدید برای پایدارسازی سیستم‌های ناپایدار، روش کنترول لغزشی می‌باشد. موثریت این روش این است که در همه انواع سیستم‌های خطی، غیرخطی، مستقل از زمان و وابسته به زمان قابل‌اجرا می‌باشد.

کلمات کلیدی: توابع لیاپانوف، خطی سازی، کنترل لغزشی، نقطه تعادل.

مقدمه

سیستم‌های دینامیکی مستقل از زمان به دو نوع می‌باشند، خطی و غیرخطی. برای یک سیستم دینامیکی، پایداری تقریباً مهم‌ترین موضوعی می‌باشد که باید تعیین شود، به دلیل اینکه سیستم ناپایدار عموماً بی‌فایده و بالقوه خطرناک است، ازلحاظ کیفی سیستمی پایدار می‌باشد که شروع به فعالیت سیستم، از موقعیتی نزدیک نقطهٔ کار مطلوبش، منجر به باقی ماندن دائمی آن در اطراف نقطه کار شود. به‌طور مثال در سیستم‌های کنترولی طیاره، مسئله، تعیین پایداری می‌باشد که اختلال در مسیر به سبب شدت طوفان، باعث انحراف قابل‌ملاحظهٔ در مسیر پرواز نشود. برای سیستم‌های غیرخطی و سیستم‌های مستقل از زمان معیارهای پایداری زیادی وجود دارد، که ازجمله معیار پایداری نیکویست (Nyquist) و پایداری روت (Routh) (برقز، ۱۳۷۲).

زمانی چنین معیارهای پایداری قابل‌اجرا و کاربرد نمی‌باشند که سیستم غیرخطی وابسته به زمان باشد. باید تذکر داد که معیار پایداری نیکویست ممکن در یک بخش خاص سیستم‌های غیرخطی به کار

گرفته شود. مؤثرترین روشی که برای بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی به‌کاررفته روش الکساندر لیاپانوف(Alexander Mikhailovich Lyapunov) است. این روش در اواخر قرن نوزدهم میلادی توسط ریاضی‌دان روسی بنام الکساندر لیاپانوف مطرح شد، و در سال ۱۸۹۲ میلادی برای اولین بار منتشر شد و توسط پوانکاره به زبان فرانسوی ترجمه شد. در مورد تحقیقات علمی که توسط افراد مختلف چون لور(Lure) لاسال (Lasalle) ولفشتز(Lefschets) صورت گرفت در نتیجه باعث شد که در اوایل دهۀ ۱۹۶۰ میلادی، کار لیاپانونف مورد توجه بیشتر گروه‌های مهندسی کنترل قرار گیرد (ابوالعباس،۱۳۸۴).

اساس کار لیاپانوف شامل دو روش برای تحلیل پایداری می‌باشد:

۱- روش خطی سازی: روش که در مورد پایداری موضعی یک سیستم غیرخطی در اطراف نقطه‌ی تعادل از روی خواص پایداری تقریب خطی آن بحث می‌کند.

۲- روش مستقیم: روش که بر اساس توابع اصطلاحاً لیاپانوف شکل‌گرفته است، محدود به حرکات کوچک نمی‌شود، این روش در همۀ سیستم‌های دینامیکی، شامل خطی و غیرخطی، ازلحاظ زمانی پیوسته یا گسسته، مرتبه محدود یا نامحدود و در محدوده حرکات کوچک و بزرگ قابل‌استفاده می‌باشد(اسلوتین، ۱۳۸۲).

با ارزش‌تر از همه اینکه، با به‌کارگیری روش مستقیم لیاپانوف ما می‌توانیم پایداری یک سیستم را بدون حل معادلات وضعیت آن را تعیین کنیم، که خیلی مفید است، بدلیل اینکه وضعیت سیستم‌های غیرخطی یا وابسته به زمان بسیار مشکل است. مشکل معمولی این روش، یافتن یک تابع لیاپانوف مناسب در یک سیستم فرض شده است، ازآنجایی‌که هیچ راه کلی مؤثری برای یافتن تابع لیاپانوف وجود ندارد، باید از امتحان و خطا برای جستجوی توابع لیاپانوف استفاده کرد. برای این کار می‌توان از روش‌هایی چون روش کراسوفسکی(Krasovskii method) و روش گرادیان متغیر(Variable Gradient method) نیز کمک گرفت.

مواد و روش کار

در این مقاله علمی با استفاده از روش‌های تحقیق نوع کتابخانه‌ای صورت گرفته و هدف آن بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی مستقل از زمان است. مواد که در این تحقیق از آن استفاده‌شده است کتب، مجلات و مقالات علمی تحقیقی که در سایت‌های معتبر جهانی به نشر رسیده است می‌باشد.

سیستم‌های دینامیکی غیرخطی مستقل از زمان

سیستم دینامیکی غیرخطی مستقل از زمان(Nonlinear Time Invariant systems) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big), x(t_0) = x_0 \in R^n \quad (I)$$

در سیستم بالا، f یک تابع از R^n به R^n می‌باشد و $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ حامل است که متغیر وضعیت نامیده می‌شود.

تبصره ۱: سیستم‌های کنترولی غیرخطی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u)$$

تعریف ۱. آشوب(chaos): در سیستم‌های خطی، تفاوت‌های اندک در شرایط اولیه، تنها سبب تغییرات کوچکی در خروجی می‌شود، اما در سیستم‌های غیرخطی این‌طور نمی‌باشد. سیستم‌های غیرخطی پدیده‌ای را بنام آشوب می‌توانند از خود نمایش دهند، که به‌واسطهٔ آن خروجی سیستم به میزان بسیار زیاد نسبت به شرایط اولیه حساس می‌باشد. حتی با داشتن مدل کاملی از سیستم غیرخطی پاسخ سیستم در مدت زمان طولانی به‌خوبی قابل پیش‌بینی نمی‌باشد. آشوب را می‌توان به‌راحتی از حرکت تصادفی تفکیک کرد. به‌طور مثال نتیجه پرتاب یک سکه در هر بار، تصادفی و نامعلوم است، اما پیامدهای مورد انتظار این پدیده هنگامی‌که به تعداد زیادی تکرار می‌شود، پایدار و قابل پیش‌بینی است (اسلوتین، ۱۳۸۲ پینج، ۱۳۸۵ و Khalil، ۲۰۰۳).

تعریف ۲، نقطه‌ی تعادل (Equilibrium point): سیستم دینامیکی $\dot{x} = f(x)$ را در نظر می‌گیریم، که در آن f یک تابع از R^n به R^n است، نقطه $x = x^*$ یک نقطه تعادل سیستم $\dot{x} = f(x)$ است، هرگاه که وضعیت سیستم در موقعیت x^* شد و تا ابد در x^* باقی بماند، یعنی x^* زمانی یک نقطهٔ تعادل این سیستم گفته می‌شود که $f(x^*) = 0$ شود.

سیستم‌های دینامیکی غیرخطی مستقل از زمان همراه با تأخیر

یکی دیگر از مسائل سیستم‌های غیرخطی، مسائل تأخیر زمانی هستند، تأخیر عبارت است از مدت‌زمانی می‌باشد که باوجود اعمال ورودی، خروجی سیستم ظاهر نمی‌گردد. در مدل‌سازی پدیده‌ها از معادلات دیفرانسیل معمولی(Ordinary Differential Equations) استفاده می‌کنیم، که همیشه زمان حال مورد توجه واقع‌شده $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$، اما در یک مدل واقعی جواب‌های معادله در زمان گذشته نیز تأثیرگذار است، درصورتی‌که معادله را بر اساس گذشته بیان کنیم یک معادله دیفرانسیل تأخیری داریم. ممکن به‌وسیلهٔ معادلات با تأخیر زمانی دینامیک بسیار سیستم‌هایی کنترلی بیان تأخیرها ممکن است در وضعیت سیستم، ورودی کنترول و یا خروجی نمایان شوند و به خاطر خواص فیزیکی تجهیزات استفاده‌شده در سیستم، انتقال پیام یا اندازه‌گیری متغیرهای سیستم ظاهر شوند، همچنین برای مدل‌سازی چندین مکانیسم مختلف در دینامیک بیماری‌های همه‌گیر می‌توان سیستم‌های با تأخیر زمانی استفاده کرد.

معادلات دیفرانسیل تأخیری(Delay Differential Equations) بارها در تئوری کنترل و رشد جمعیت رخ‌داده‌اند، این نوع معادلات مشابه با مسائل مقدار اولیه هستند، طوری که مقدار تابع در نقطهٔ آغاز باید معلوم باشد، و به دو نوع‌اند. معادلات دیفرانسیل تأخیری توزیع‌شده و معادلات دیفرانسیل تأخیری گسسته.

معادلات دیفرانسیل تأخیری توزیع‌شده: به معادلات گفته می‌شود که f وابسته به x روی یک دسته از مقادیر گذشته که امکان بی‌اندازه بزرگ دارد $\tau = \infty$ محاسبه شده‌اند.

معادلات دیفرانسیل تأخیری گسسته: به معادلات گفته می‌شود که تنها مقدار متناهی از مقادیر گذشته را شامل می‌شود.

با فرض اینکه $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_m$ یک مجموعه m تایی از اعداد مثبت است، که نتأخیرها ده تأخیرها شد، طوری که بزرگ‌ترین تأخیر توسط τ_m نشان داده می‌شود، همچنین ممکن است τ_i ها تابعی از $\tau_i = \tau_i(t), t$ و یا تابعی از t و $\tau_i = \tau_i(t, x), x$ باشند، در این صورت می‌توان یک معادله دیفرانسیل تأخیری را به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$\dot{x} = g(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)); x \in R^n \qquad \text{(II)}$$

با شرایط اولیه مناسب در $t = t_0$

$$x(t) = \phi_0(t), t_0 - \tau_m \le t \le t_0$$

طوری که، $\phi_0 : R \to R^n$ یک تابع معلوم و به‌طور پیوسته می‌باشد. $\phi_0(t)$ تابع اولیه، t_0 لحظه اولیه و $[t - \tau_m, t_0]$ مقدار اولیه نامیده می‌شود.

تبصره ۲: معادله (II) را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم x^* نقطه تعادل معادله است، همچنین برای r به‌قدر کافی بزرگ، $g \in C^r$ باشد، به‌منظور ساده‌سازی معادله مشخصه متناظر با (II)، ابتدا معادله (II) را خطی سازی می‌نماییم.

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^{m} A_j x(t-\tau_j) + g(x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)) \ \text{(III)}$$

طوری که،

$$A_j = D_j g(x^*, \cdots, x^*);\ j = 0,1, \cdots, m$$

و

$$\begin{aligned} f(x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)) &= g\big(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)\big) - A_0 x(t) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m} A_j x(t-\tau_j) \end{aligned}$$

که $D_j g$ ژاکوبین g نسبت به j-امین مؤلفه آن است.

معادله (III) برای $x(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر ارائه کرد،

$$\dot{x}(t) = L(x_t) + F(x_t) \qquad \text{(IV)}$$

طوری که، $L: C \times R^n \to R^n$ تابع خطی می‌باشد و به‌صورت زیر بیان می‌گردد،

$$L(\phi) = A_0 \phi(0) + \sum_{j=1}^{m} A_j \phi(-\tau_j)$$

و $F: C \times R^n \rightarrow R^n$ غیرخطی خطی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$F(\phi) = f(\phi(0), \phi(-\tau_1), \cdots, \phi(-\tau_m))$$

طوری که،

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), -\tau \leq \theta \leq 0$$

معادله مشخصه متناظر با خطی سازی (IV) را می‌توان به‌صورت زیر ارائه کرد،

$$\dot{x}(t) = L(x_t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^{m} A_j x(t-\tau_j)$$

با تعویض $x(t) = \exp(\lambda t)\nu$ که $\nu \in R^n$ در نتیجه داریم،

$$\left[\lambda I - A_0 - \sum_{j=1}^{m} A_j \exp(-\lambda\tau_j)\right] \exp^{\lambda t}\nu = 0$$

در نتیجه معادله مشخصه عبارت است از،

$$\det\left[\lambda I - A_0 - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\lambda\tau_j}\right] = 0 \qquad \text{(V)}$$

برای جزئیات بیشتر به (Campbell، ۲۰۰۷) مراجعه شود.

روش خطی سازی لیاپانوف

این روش که بنام روش غیرمستقیم لیاپانوف نیز مشهور است، به پایداری یک سیستم غیرخطی می‌پردازد. اساس این روش بر پایه این مطلب می‌باشد که یک سیستم غیرخطی برای حرکاتی در محدوده کوچک، مشابه تقریب خطی‌اش رفتار می‌کند. ازآنجایی‌که تمام سیستم‌های موجود در طبیعت ذاتاً غیرخطی هستند، روش خطی سازی لیاپانوف توجیه اصولی به‌کارگیری روش‌های کنترول خطی در مسائل عملی است. این روش نشان می‌دهد که یک طراحی پایدار توسط کنترول خطی، پایداری موضعی اصلی را تضمین می‌کند.

خطی سازی سیستم‌های مستقل از زمان

سیستم مستقل از زمان $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیریم، با فرض اینکه $f(x)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. همچنین فرض می‌کنیم که نقطه تعادل سیستم فوق $x = 0$ یعنی $f(0) = 0$باشد. اکنون شرح تیلور سیستم فوق را حول نقطه $x = 0$ می‌نویسیم.

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_{x=0} x + f_{h,o,t}(x) = Ax + f_{h,o,t}(x) \qquad \text{(VI)}$$

$f_{h,o,t}$ بیانگر جملات درجه بالاتری برحسب x است.

$A_{n\times n}$ متریکس ژاکوبی f برحسب x در $x = 0$ است، که اجزای متریکس آن $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ می‌باشند؛ یعنی

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

حال سیستم $\dot{x} = Ax$ خطی سازی شده یا تقریب خطی، سیستم غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ در نقطه $x = 0$ می‌گوییم(اسلوتین، ۱۳۸۲).

به‌طور مشابه، اگر خواسته باشیم یک سیستم غیرخطی را مستقل از زمان با ورودی کنترول u به شکل $\dot{x} = f(x, u)$ را خطی سازی کنیم، طوری که مبدأ مختصات نقطه تعادل آن باشد، شرح تیلور f را حول مبدأ طور زیر می‌نویسیم،

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_{(x=0,u=0)}x + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_{(x=0,u=0)} + f_{h,o,t}(x) = Ax + Bu + f_{h,o,t}(x)$$

$f_{h,o,t}$ بیانگر جملات درجه بالاتری برحسب x است.

$A_{n\times n}$ متریکس ژاکوبی f برحسب x در $(x = 0, u = 0)$ است، که اجزای متریکس آن $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ می‌باشد.

$B_{n\times n}$ متریکس ژاکوبی f برحسب x در $(x = 0, u = 0)$ است، که اجزای متریکس آن $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ می‌باشد، و m تعداد ورودی‌ها است.

خطی سازی لیاپانوف

با فرض اینکه $x = 0$ نقطه تعادل سیستم غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ باشد و $D \subset R^n$ یک مجموعه نقاطی که شامل مبدأ باشد، همچنین $f: D \to R^n$ تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد.

فرض کنید که $\dot{x} = Ax$ تقریب خطی سیستم $\dot{x} = f(x)$ در $x = 0$ باشد، و λ_i, $i = 1, \cdots, n$، مقادیر ویژه ماتریکس A باشند.

۱- اگر به قیمت هر $Re\lambda_i < 0, i = 1, \cdots, n$ باشد، یعنی همه مقادیر ویژه ماتریکس A دارای قسمت حقیقی منفی باشند، در این صورت سیستم خطی سازی شده پایدار بوده، و غیرخطی به‌صورت مجانبی پایدار است.

۲- اگر حداقل به قیمت یک $Re\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n$ باشد، یعنی حداقل یکی از مقادیر ویژه متریکس A دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، و بقیه مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی باشند، در این صورت سیستم خطی سازی شده و غیرخطی خطی ناپایدار هستند.

۳- اگر حداقل به قیمت یک $Re\lambda_i = 0, i = 1, \cdots, n$ باشد، و سایر مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی باشند، در این صورت سیستم خطی سازی شده به‌طور حاشیه‌ای پایدار است، اما در

مورد سی غیرخطی خطی هیچ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت. برای معلومات بیشتر به(Khalal، ۲۰۰۳) مراجعه شود.

مثال۱: سیستم $\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -a\sin x_1 - bx_2 \end{cases}$ طوری که $a, b > o$ می‌باشند، با استفاده از روش خطی سازی لیاپانوف پایداری نقاط تعادل این سیستم را بررسی کنید.

حل: سیستم فوق سه‌نقطه تعادل دارد، $E_1 = (0,0), E_2 = (\pi, 0), E_3 = (2\pi, 0)$

متریکس ژاکوبی سیستم را دریافت می‌کنیم،

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos x_1 & -b \end{bmatrix}$$

به‌منظور تحلیل پایداری نقطه تعادل E_1 متریکس ژاکوبی را در این نقطه محاسبه می‌کنیم،

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}|_{E_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه متریکس A_1 عبارت‌اند از،

$$\lambda_1 = -{}^1/_2\, b + {}^1/_2 \sqrt{b^2 - 4a}\,, \lambda_2 = -{}^1/_2\, b - {}^1/_2 \sqrt{b^2 - 4a}$$

حالت‌های سیستم را بررسی می‌کنیم،

۱- اگر $b^2 > 4a$ باشد، در این صورت $\mathrm{Re}\lambda_1 < 0$ و $\mathrm{Re}\lambda_2 < 0$ است.

۲- اگر $b^2 < 4a$ باشد، در این صورت λ_1 و λ_2 طور زیر نوشته می‌شوند،

$$\lambda_1 = -{}^1/_2\, b + {}^1/_2\, i\sqrt{4a - b^2}\,, \lambda_2 = -{}^1/_2\, b - {}^1/_2\, i\sqrt{4a - b^2}$$

در این حالت نیز $\mathrm{Re}\lambda_1 < 0$ و $\mathrm{Re}\lambda_2 < 0$ است.

۳- اگر $b^2 = 4a$ باشد، در این صورت $\mathrm{Re}\lambda_1 < 0$ و $\mathrm{Re}\lambda_2 < 0$ است.

در نتیجه سیستم فوق نظر به قضیه خطی سازی لیاپانوف در نقطه تعادل E_1 پایدار مجانبی می‌باشد.

حال متریکس ژاکوبی را در نقطه E_2 بررسی می‌کنیم، نقطه تعادل E_2 را می‌توان به مبدأ منتقل کرد، $X_1 = x_1 - \pi$ و $X_2 = x_2$.

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}|_{E_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه متریکس A_2 عبارت‌اند از،

$$\lambda_1 = -{}^1/_2\, b + {}^1/_2 \sqrt{b^2 + 4a}\,, \lambda_2 = -{}^1/_2\, b - {}^1/_2 \sqrt{b^2 + 4a}$$

به قیمت هر $a, b > 0$ داریم، $\mathrm{Re}\lambda_1 < 0$ و $\mathrm{Re}\lambda_2 < 0$، بنا سیستم فوق در نقطه تعادل E_2 ناپایدار است. حالت سیستم در نقطه E_3 مانند نقطه E_1 می‌باشد.

توابع لیاپانوف سیستم‌های غیرخطی مستقل از زمان

در این مورد، دو روش کراسوفسکی و گرادیان متغیر ارائه می‌گردد، روش کراسوفسکی شکل ساده‌ای از تابع لیاپانوف در سیستم‌های غیرخطی مستقل از زمان $\dot{x} = f\big(x(t)\big)$ را پیشنهاد می‌کند و روش گرادیان مزدوج تابع لیاپانوفی را برای سیستم‌های $\dot{x} = f\big(x(t)\big)$و همچنان غیرخطی اتم‌های غیرخطی وابسته به زمان $\dot{x} = f(x(t), t)$به دست می‌آورد(اسلوتین، ١٣٨٢ و Ogata، ٢٠١٠).

١- روش کراسوفسکی

سیستم مستقل از زمان $\dot{x} = f\big(x(t)\big)$ را در نظر می‌گیریم، با فرض اینکه مبدأ نقطه‌ی تعادل و A بیانگر متریکس ژاکوبی این سیستم باشد، همین‌طور فرض می‌کنیم که D یک همسایگی شامل مبدأ باشد، اگر متریکس $F = A + A^T$ در همسایگیD معین و منفی باشد، در این صورت نقطه تعادل به‌صورت مجانبی پایدار می‌باشد، و یک تابع لیاپانوف در این سیستم به‌صورت $V(x) = f^T(x)f(x)$ می‌باشد.

اگر D تمام فضای حالت باشد، و به‌علاوه هنگامی‌که $\|x\| \to \infty, \|V(x)\|$ باشد در این صورت نقطه تعادل پایدار مجانبی به‌صورت سراسر می‌باشد(اسلوتین ،١٣٨٢).

مثال٢: با استفاده از روش کراسوفسکی پایداری و سیستم غیرخطی $\begin{cases} \dot{x_1} = -6x_1 + 2x_2 \\ \dot{x_2} = 2x_1 - 6x_2 - 2{x_2}^3 \end{cases}$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا متریکس ژاکوبی سیستم را به دست می‌آوریم.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6{x_2}^2 \end{bmatrix}$$

حال متریکس F را به دست می‌آوریم.

$$F = A + A^T = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12{x_2}^2 \end{bmatrix}$$

متریکس F معین و منفی است، زیرا به قیمت هر $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in R$ و به قیمت هر $x_1, x_2 \neq 0$داریم:

$$[\mathcal{V}_1\ \mathcal{V}_2]\begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12{x_2}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix}$$
$$= -12{\mathcal{V}_1}^2 - 12{\mathcal{V}_2}^2 + 8\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2 - 12{x_2}^2{\mathcal{V}_2}^2$$
$$= -۴(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2)^2 - 8{\mathcal{V}_1}^2 - 8{\mathcal{V}_2}^2 - 12{x_2}^2{\mathcal{V}_2}^2$$

بنابراین قضیه کراسوفسکی مبدأ به‌صورت مجانبی پایدار می‌باشد.

٢- روش گرادیان متغیر

روش گرادیان متغیر، یک‌راه ظاهری برای یافتن توابع لیاپانوف می‌باشد، در این روش اول شکل مشخصی برای گرادیان یک تابع لیاپانوف ناشناخته فرض می‌شود، سپس خود تابع لیاپانوف به‌واسطه انتگرال‌گیری از گرادیانش به دست می‌آید(اسلوتین، ١٣٨٢ و Ogata، ٢٠١٠).

تابع اسکالر $V(x)$ با رابطه انتگرالی زیر با گرادیانش ارتباط دارد.

$$V(x)=\int_0^x \nabla V dx \qquad \text{(VII)}$$

که در آن $\nabla V=\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial V}{\partial x_n}\right]^T$ می‌باشد.

در این روش ابتدا یک شکل پیشنهادی تابع گرادیان را به‌صورت زیر در نظر می‌گریم(این شکل از تابع گرادیان منحصر به فرد نیست).

$$\nabla V=[\nabla V_1\cdots\nabla V_n]^T \qquad \text{(VIII)}$$

و در آن ∇V_i به‌صورت زیر پیشنهاد می‌شود.

$$\nabla V_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}\ ,1\le i\le n$$

a_{ij} ضرایبی هستند که باید تعیین شوند. نمایش متریکس آن طور زیر صورت می‌گیرد:

$$\nabla V=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+ & \cdots & +a_{nn}x_n\end{bmatrix}$$

جهت یافتن یک تابع اسکالر یکتای V از ∇V تابع گرادیان باید در شرایط زیر اصطلاحاً شرایط تاو (Curl condition) نامیده می‌شوند، را صدق کند.

$$\frac{\partial\nabla V_i}{\partial x_i}=\frac{\partial\nabla V_i}{\partial x_i},i,j=1,2,3,\cdots,n$$

تبصره ۳: به دلیل اینکه برقراری شرایط تاو ایجاب می‌کند که نتیجه انتگرال‌گیری رابطه (V) مستقل از مسیر انتگرال‌گیری باشد، معمولاً مناسب است که انتگرال‌گیری در امتداد مسیری که به‌نوبت موازی هر کدام از محورهای مختصات است، مشخص گردد. یعنی:

$$V(x)=\int_0^{x_1,(x_2=x_3=\cdots=x_n=0)}\nabla V_1dx_1+\int_0^{x_2,(x_3=\cdots=x_n=0)}\nabla V_2dx_2+\cdots+\int_0^{x_n}\nabla V_ndx_n$$

مثال۳: تابع لیاپانوف مناسبی را جهت پایداری سیستم $\begin{cases}\dot{x_1}=-x_1+2x_1^2x_2\\ \dot{x_2}=-x_2\end{cases}$ با روش گرادیان متغیر به دست آورید.

حل: فرض می‌کنیم گرادیان تابع لیاپانوف ناشناخته به‌صورت زیر باشد،

$$\nabla V=\begin{bmatrix}\nabla V_1\\ \nabla V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{bmatrix}$$

اگر ضرایب a_{ij} را به‌صورت $a_{11} = a_{22} = 1$ و $a_{12} = a_{21} = 0$ انتخاب کنیم، در این صورت تابع گرادیان به‌صورت زیر تحریر می‌گردد،

$$\begin{cases} \nabla V_1 = x_1 \\ \nabla V_2 = x_2 \end{cases} \Longrightarrow \nabla V = [x_1 \ x_2]^T$$

درست بودن معادلات تاو را بررسی می‌نماییم

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = 0$$

$\dot{V}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\dot{V} = \nabla V \cdot \dot{x} = \nabla V_1 \cdot \dot{x}_1 + \nabla V_2 \cdot \dot{x}_2 = x_1(-x_1 + 2x_1^2 x_2) + x_2(-x_2)$$
$$= -x_1^2(-1 + 2x_1 x_2) - x_2^2$$

$\dot{V}$ در محدوده زیر به‌صورت موضعی معین منفی می‌باشد،

$$-۱ + ۲x_1 x_2 > 0$$

در حقیقت این نامساوی یک محدودیت برای x_1 و x_2 می‌باشد.

حال V را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم،

$$V(x) = \int_0^{x_1,(x_2=0)} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = {}^1\!/_2 \, (x_1^2 + x_2^2)$$

چون تابع $V(x)$ معین مثبت است، بنا سیستم فوق در ناحیه‌ای که توسط نامساوی $x_1 x_2 < {}^1\!/_2$ تعریف می‌شود، پایدار مجانبی به‌صورت موضعی است.

تبصره ۴: ضرایب تابع گرادیان منحصر به فرد نیستند، فقط باید طوری انتخاب شوند که معادلات تاو برقرار باشند.

مثال۴: در معادلات گرادیان $\nabla V = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$ ضرایب a_{ij} را می‌توانیم طور زیر انتخاب کنیم:

$$a_{11} = \frac{2}{(1 - x_1 x_2)^2}$$
$$a_{12} = \frac{-x_1^2}{(1 - x_1 x_2)^2}$$
$$a_{21} = \frac{x_1^2}{(1 - x_1 x_2)^2}$$
$$a_{22} = 2$$

بنابراین تابع گرادیان به‌صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \dfrac{2x_1}{(1-x_1x_2)^2} - \dfrac{x_1^2x_2}{(1-x_1x_2)^2} \\ \dfrac{x_1^3}{(1-x_1x_2)^2} + 2x_2 \end{bmatrix}$$

درست بودن معادلات تاو را بررسی می‌نماییم،

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{3x_1^2 - x_1^3x_2}{(1-x_1x_2)^3}$$
$$\frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = \frac{3x_1^2 - x_1^3x_2}{(1-x_1x_2)^3}$$

$\dot{V}$ را محاسبه می‌کنیم،

$$(\dot{V}x) = \nabla V \cdot \dot{x} = \nabla V_1 \cdot \dot{x}_1 + \nabla V_2 \cdot \dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)$$

واضح است که $\dot{V}$ به‌طور سرا سری معین منفی می‌باشد.

حال V را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم،

$$V(x) = \int_0^{x_1,(x_2=0)} \left[\frac{2x_1}{(1-x_1x_2)^2} - \frac{x_1^2x_2}{(1-x_1x_2)^2}\right] dx_1 + \int_0^{x_2} \left[\frac{x_1^3}{(1-x_1x_2)^2} + 2x_2\right] dx_2$$

$$V(x) = x_2^2 + \frac{x_1^2}{1-x_1x_2}$$

تابع $V(x)$ در ناحیه‌ای که توسط نامساوی $0 < (۱ - x_1x_2)$ تعریف می‌شود، به‌صورت موضعی معین مثبت است.

پایدارسازی سیستم‌های ناپایدار به روش کنترول لغزشی(Sliding mode)

یکی از روش‌های جدید برای پایدارسازی سیستم‌های ناپایدار و آشوبگر روش کنترول لغزشی می‌باشد، در این روش، ابتدا تابع کنترول را به سیستم اضافه می‌کنیم، بعد معرفی یک‌رویه که سطح لغزشی (Sliding surface) نام دارد، که از مرکز مختصات (نقطه تعادل) می‌گذرد، مسیرهای وضعیت سیستم را به روی این رویه رهنمایی می‌کنیم، تا اینکه مسیرها از طریق رویه به نقطه تعادل میل کند، بدین ترتیب سیستم به پایداری می‌رسد. یکی از خوبی‌های این روش این است که در همه انواع سیستم‌های خطی، غیرخطی، مستقل از زمان و وابسته به زمان قابل اجرا می‌باشد. همچنین در این روش هنگامی‌که سیستم اصطلاحاً بر روی سطح لغزش می‌افتد خود به خود به سمت نقطه تعادل میل می‌کند.

تحلیل روش کنترول لغزشی

سیستم غیرخطی مستقل از زمان زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(x(t)) + \rho(x(t)) \ (IX)$$

$x \in \mathbb{R}^n$، حامل است که متغیر وضعیت نامیده می‌شود.

$f(x)$ ، یک تابع از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

$B(x)$، متریکسی $n \times m$ و معکوس‌پذیر می‌باشد، طوری که $k(B) = m$ می‌شود، و درایه‌های آن توابعی پیوسته و مستقل از زمان هستند.

$u \in \mathbb{R}^m$، ورودی کنترل و $\rho(x) \in \mathbb{R}^n$ تابع اختلال(disturbance) است، و $۱ \leq m < n$ فرض می‌شود.

تعریف۳، سطح لغزشی: با فرض اینکه $s: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابعی باشد که ابر صفحه زیر را به وجود می آورد، و این ابر صفحه، سطح لغزش نامیده می‌شود.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \ s.t \ s(x) = 0\}$$

تعریف۴، حرکت لغزشی(sliding motion): زمانی که مسیرهای وضعیت بر روی سطح لغزشی قرار می‌گیرند، به‌صورت یک حرکت ایدئال به سمت نقطه تعادل سیستم میل می‌کند، به این روند حرکت لغزشی می‌گویند.

تعریف۵، زمان دسترسی(reaching time): با فرض اینکه زمان متناهی t_s وجود داشت طوری که جواب سیستم (IX) در رابطه زیر صدق کند،

$$s(x(t)) = 0, \forall t \geq t_s$$

در این صورت یک حرکت لغزشی برای هر $t \geq t_s$ وجود دارد، و زمان t_s زمان دسترسی نامیده می‌شود.

فرض کنیم در زمان حرکت لغزشی داریم،

$$s(t) = 0, \dot{s}(t) = G(\dot{x}(t)) \forall t \geq t_s$$

که در آن $G = \frac{\partial_s}{\partial_x}$ می‌باشد، با وضع نمودن $\dot{x}(t)$ در رابطه (IX) خواهیم داشت،

$$G\dot{x}(t) = Gf(x) + GB(x)u(x) + G\rho(x) \ , \forall t \geq t_s \ (X)$$

فرض کنید ماتریکس G به قسمی است که ماتریکس مربعی GB جفت باشد، تابع کنترول موجود در معادله(X) به‌طور منحصربه‌فرد به‌صورت زیر بیان می‌گردد ،

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}G(f(x) + \rho x) \qquad (XI)$$

به کنترول فوق کنترول هم قیمت می‌گوییم، پس از اعمال کنترول هم قیمت به سیستم (IX) مسیرهای بهینه این سیستم که مستقل از کنترول هستند، به سمت نقطه تعادل سیستم (مبدأ مختصات) میل کنند، و یا به‌طور معادل حرکت لغزشی اتفاق می‌افتد. با وضع نمودن معادله (XI) در سیستم (IX) نتیجه زیر به دست می‌آید،

$$\dot{x}(t) = (I_n - B(GB)^{-1}G(f(x) + \rho x), Gx(t_s) = 0, \forall t > t_s \ (XII)$$

هنگامی‌که سیستم (IX) بر روی سطح لغزشی قرار می‌گیرد، سیستم (XII) به‌دست‌آمده به دو سیستم دیگر تجزیه می‌شود، که در زیر تشریح می‌گردد .

چون $rank(B) = m$ است، و یک متریکس متعامد $T_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$ موجود است، طوری که رابطه متریکس زیر برقرار باشد،

$$T_r B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و $B_r \in \mathbb{R}^{m\times m}$ است.

با استفاده از روش حذفی گوس، متریکس B به‌صورت سطری سطح شیب‌دار تبدیل می‌شود، همچنین متریکس متعامد T_r که در متریکس بالای صدق می‌کند توسط روش تجزیه QR به دست می‌آید.

اگر مسیر حالت سیستم را به‌صورت زیر جدا کنیم،

$$T_r x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

طوری که $x_1 \in \mathbb{R}^m$ و $x_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ هستند، در این صغیر خطیم غیرخطی رابطه (IX) می‌تواند به شکل زیر نوشته شود،

$$\dot{\mathrm{x}}_1 = \mathrm{f}_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) + B_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)u + \rho_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \qquad (XII)$$
$$\dot{\mathrm{x}}_2 = \mathrm{f}_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) + \rho_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \ (XIII)$$

درنتیجه داریم،

$$[\mathrm{f}_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2), \mathrm{f}_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)]^T = T_r f(x)$$

و

$$[\rho_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2), \rho_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)]^T = T_r \rho(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$$

معادله $(XIII)$ که مستقل از کنترول می‌باشد، به‌عنوان سیستمی که حرکت لغزشی را نشان می‌دهد شناخته می‌شود، و سیستم کاهش مرتبه یافته یا سیستم کنترول لغزشی نام دارد(Orloy، ۲۰۰۴).

برای بررسی سیستم‌های غیرخطی و سیستم‌های مستقل از زمان معیارهای پایداری زیادی وجود دارد، که ازجمله معیار پایداری نیکویست (Nyquist) و پایداری روت (Routh) می‌باشد، معیار پایداری نیکویست ممکن در یک بخش خاص سیستم‌های غیرخطی به کار گرفته شود، درحالی‌که مؤثرترین روشی که برای تحلیل پایداری سیستم‌های غیرخطی به‌کاررفته روش الکساندر لیاپانوف است. بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی در اواخر قرن نوزدهم میلادی توسط ریاضی‌دان روسی بنام الکساندر لیاپانوف مطرح شد، که موردتوجه بیشتر گروه‌های مهندسی کنترول قرار گرفت و به یکی از روشی‌های مؤثر در تحلیل پایداری سیستم‌ها تبدیل شد. روش پایداری لیاپانوف می‌تواند برای سیستم‌های خطی و غیرخطی استفاده شود و برای بررسی پایداری نقاط تعادل در مدل‌های ریاضی، سیستم‌های دینامیکی و سیستم‌های کنترولی بسیار مفید است. این روش به‌عنوان یک ابزار قدرتمند در تحلیل پایداری سیستم‌ها مورداستفاده قرار می‌گیرد و در بسیاری از زمینه‌های علمی و مهندسی ازجمله رباتیک، الکترونیک، بیوشیمی و اقتصاد به کار می‌رود. روش کنترول لغزشی یکی از روش‌های نوین

برای تحلیل و پایدارسازی سیستم‌های ناپایدار می‌باشد که در همه انواع سیستم‌های خطی، غیرخطی، مستقل از زمان و وابسته به زمان قابل اجرا می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله پایداری سیستم‌های غیرخطی مستقل از زمان مور دبحث و بررسی قرار گرفت. ازآنجای که یک سیستم دینامیکی ناپایدار به‌صورت عموم بی‌فایده و بالقوه خطرناک می‌باشد، پایداری سیستم یکی از موضوعات مهمی است که باید تعیین شود. بدین منظور ابتدا به بررسی پایداری و نقاط تعادل پایدار و ناپایدار پرداختیم و سپس با استفاده از روش‌های لیاپانوف و کنترل لغزشی سیستم‌های ناپایدار را پایدار ساختیم.

منابع

ابوالعباس، ک. (۱۳۸۴). ایمونولوژی پایه، وظایف و اختلالات دستگاه ایمنی. ترجمهٔ افشاری، بابک عزیز، تهران: انتشارات طبیب.

اسلوتین. ژان ژاک ا. و وایپیگ. لی. (۱۳۸۲). کنترل غیرخطی کاربردی، مترجمین هاشمی، محمدرضا، گلپایگانی، منوچهر احمدوند، تهران: انتشارات دانشگاهی.

برقز. ا. د. و گراهام. آ. (۱۳۷۲). مقدمه‌ای بر نظریه کنترل و کنترل بهینه، مترجمین وحیدیان، علی، کامیاد و ابولقاسم بزرگنیا، مشهد: انتشارات فردوسی.

پینج. ای. (۱۳۸۵). کنترل بهینه و حساب تغییرات، ترجمهٔ فراهی، محمد هادی، مشهد: انتشارات دانشگاه فردوسی.

سحاب، علیرضا، حداد، ظریف محمد. (۱۳۸۷). کنترل سیستم غیرخطی آونگ وارونه. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن (ریاضی کاربردی)، انشتارات دانشگاه آزاد لاهیجان.

Khalil. H. K. (2003).Global Nonlinear. Department of Electrical and Computer Engineering Michigan State University: Prentice Hall.

Campbell, S. A. (2007). Introduction to delay differential equations. Department of Applied Mathematics, University of Waterloo, 71.

Ogata, K. (2010). Modern control engineering (Vol. 5). Upper Saddle River, NJ: Prentice hall.

Orlov, Y., Lou, Y., & Christofides, P. D. (2004). Robust stabilization of infinite-dimensional systems using sliding-mode output feedback control. *International Journal of Control*, *77*(12), 1115-1136.

Giampaolo Cicogna, Guiseppe Gaeta, (2019). Symmetry and perturbation theory in nonlinear dynamics ,Publisher: Springer, Berlin; New York.

Investigating the Stability analysis of nonlinear time-invariant systems

Abdul Munir Khirzada
Department of Mathematics, Education Faculty, Panjsher Institute of Higher Education.
Email: abdulmunirkhirzada@yahoo.com

Abstract

Analysis of the stability of non-linear species of systems, even nonlinear time-invariant systems, is often very difficult or even impossible, stabilization of unstable equilibrium points of dynamic systems is one of the most critical issues, in this research, the stabilization of nonlinear time-invariant systems has been investigated by two methods, Lyapunov and sliding control .Lyapunov stability methods have analyzed equilibrium points using the Krasovskii and variable gradient methods to generate Lyapunov functions. One of the new methods for stabilizing unstable systems is the sliding control method, the advantage of this method is that it can be applied in all types of linear, nonlinear, time-invariant, and time-dependent systems.

Keywords: Equilibrium point, Lyapunov functions, Linearization, Sliding control.