دو فصلنامهٔ
علمی-تحقیقی **عینک** علمي-څېړنیزه شپږ میاشتنی مجله

د امتیاز خاوند: لوگر د لوړو زده کړو مؤسسه/مؤسسهٔ تحصیلات عالی لوگر تاریخ جواز مجله: ۱۴۴۴/۱۱/۱۴

کاربرد مربع‌های‌لاتین و ارتباط آن با جدول‌کیلی در گروپ‌های متناهی

پوهنیار غلام حبیب حبیبی[۱]، پوهنیار عبد الصبور فیضی[۲]

[۱،۲] دیپارتمنت ریاضی، پوهنځی تعلیم و تربیه، مؤسسه تحصیلات عالی لوگر. افغانستان.

ایمیل آدرس: gh.habibhabibi7@gmail.com

خلاصه

بیان مسئله: مربع های لاتین در تکنالوژی و علوم طبیعی امروزی کاربردی وسیع دارند که توسط آن می توانیم به بسیاری از اهدافی در علوم معاصر بخصوص ریاضی و کمپیوتر نایل آییم و همچنان ارتباط مستقیم میان مربع‌های‌لاتین و گروپ‌های متناهی در الجبر مجرد، بیشتر روشن می‌شود.

هدف: هدف از نوشتن این مقاله بررسی کاربرد مربع‌های‌لاتین در علوم معاصر و ارتباط آن با جدول کیلی در گروپ‌های متناهی است.

روش تحقیق: روش کار ما مروری اسنادی و کتابخانه ای است ،کارهای محققان را مرور کردیم و نتایج حاصله جدید را در این مقاله به بررسی گرفتیم.

نتیجه گیری: نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که جدول کیلی در گروپ‌های متناهی یک رابطه مستقیم با تعریف مربع‌های‌لاتین دارد. مربع‌های‌لاتین در علوم معاصر، کمپیوتر و بخصوص ریاضی کاربردهای متنوعی دارند؛ به‌عنوان‌مثال در ستیگنوگرافی[۴۸]، رمزنگاری، دیجیتل واترمارک، بازی‌های‌کمپیوتری، بازی‌های سودوکو، تجزیه‌وتحلیل گراف‌های شبکه‌ای، کدهای تصحیح خطا، تولید مربع‌های جادویی، احصائیه و دیگر زمینه‌های ریاضی. مربع‌های‌لاتین در علوم معاصر و تکنالوژی امروزی کاربردی وسیع دارند و در پیشرفت‌های علمی تحقیقی نقشی مهمی را ایفا می‌کند.

کلمات‌کلیدی: مربع‌های‌لاتین، مربع‌های‌لاتین متعامد و خودمتعامد، جدول‌کیلی و گروپ‌های متناهی.

استناد:حبیبی، غلام حبیب و فیضی، عبدالصبور.(۱۴۰۳). کاربردهای مربع‌های لاتین و ارتباط آن با جدولی کیلی در گروپ های متناهی، *دوفصلنامهٔ علمی-تحقیقی **عینک***، سال اول، شماره۲: ۶۴-۷۸

ناشر: مؤسسهٔ تحصیلات عالی لوگر

[1]- Setigography

مقدمه

مربع‌های لاتین یک‌بخشی از ریاضی گسسته به‌خصوص ترکیبیات الجبری است که اساس کارآن ترکیبیات حساب کردن و یا شمارش است. در دنیای ریاضیات امروزی، ترکیبیات به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات گسسته شناخته می‌شود که به بحثی در مورد مباحثی چون مجموعه‌ها، گراف‌ها، مترکس‌ها و به‌خصوص شمارش می‌پردازد. مربع‌های لاتین در تکنالوژی امروزی کاربردی زیادی دارند، علاوه برآن در این مقاله از ارتباط آن با جدول کیلی بحث شده که جدول مذکور در حل مسایل ریاضی کمک می‌کند. هدف از نوشتن این مقاله بررسی کاربردهای مربع‌های لاتین و ارتباط آن با جدول کیلی در گروپ‌ها است. ی مربع‌های لاتین یکی از مهم‌ترین بخشی از ریاضیات گسسته به‌خصوص ترکیبیات جبری است. علاوه بر کاربرد مربع‌های لاتین که از طبیعت گرفته تا علوم معاصر و تکنالوژی امروزی، در همه این عرصه‌ها کاربرد دارد، ارتباط مربع‌های‌لاتین را توضیح دادیم که برای حل و اثبات بسیاری از مسایل کمک می‌کند و برای توضیح بیشتر آن چند تا قضیه و مثال در اینجا آوردیم. مربع‌های لاتین در سال 1000م در بعضی از قبیله‌های عرب‌ها و هندی‌ها که در تعویذات و مراسم مذهبی شان به مشاهده رسیده است، البته این تعویذات مشابه مربع لاتین نبودند(Ancient, 2014). مربع‌های لاتین تنها به تعویذات محدود نبوده بلکه در اکثر از سازه‌ها و نقاشی‌ها در ساختمان‌ها از این مربع‌ها استفاده می‌شد. وقایع مربع‌های لاتین در تاریخ، در کتاب معروف بنام شمس‌المعارف الکبرای (که توسط احمد بن یوسف البونی که یکی از شخصیت‌های اهل تصوف عرب بود و تا سال ۱۲۲۵ م حیات داشت) منجر می‌شود. در این کتاب بسیاری ازمربع‌های لاتین (علاوه برمربع‌های جادویی) شامل است کتاب مذکور یکی از قدیمی‌ترین کتاب در این مورد شناخته‌شده است (Ancient, 2014). اولین نمونه شناخته‌شده توسط یک محقق فرانسوی از بخشی زراعت بنام (فرانسوا کریت دی پالوئل)[49] است که مقاله‌ای را در ۳۱ جولای سال ۱۷۸۸ م به انجمن فرهنگی زراعتی سلطنتی پاریس ارایه کرد. اندکی قبل از ارایهٔ مقالهٔ (دی پالوئل)،مربع‌های لاتین توسط (لئونارد ایلر)[50] به انجمن ریاضی معرفی شد و به همین نام مسمی شد، به نظر می‌رسد که او اولین کسی بود که آنرا با اصطلاحات ریاضی تعریف کرد خواص آن‌ها را به‌صورت ریاضی بررسی کرد، اگرچه او از قبل با این موضوع آشنا بود و استفاده می‌کرد. برای اولین بار (لئونارد ایلر) مربع‌های لاتین را در مقاله‌ای منتشر کرد که با مسئله مشهور (سی‌وشش افسر) بنا شده بود که در سال ۱۷۷۹م به اکادمی علوم سنت پیترزبورگ ارایه کرد و در سال ۱۷۸۲م منتشر شد. او بدین ترتیب مفهوم پیچیده‌تری را زیر نام (مربع‌های لاتین متعامد) مطرح کرد(ROBIN, 2013, pp. 251-254) . تحقیق جدید دیگری که در رابطه به کاربرد مربع‌های لاتین صورت گرفت این بود که در مورد روش‌های مورد استفاده برای محاسبات مربع لاتین و طراحی سودوکو بحث شد (Gupta, Bansal and Baresary,2014). هدف تحقیق ما، معرفی نمودن مربع‌های لاتین، کاربرهای آن و ارتباط آن با جدولی کیلی در گروپ‌های متناهی است. سوال اصلی ما در رابطه به تحقیق این است که آیا

[49] François Cretté de Palluel
[50] Leonhard Euler

رابطه بین مربع‌های لاتین و جدولی کیلی در گروپ‌ها وجود دارد؟ اگر وجود دار، چگونه یک رابطه است؟ و سوال فرعی آن این است که مربع‌های‌لاتین در پیشرفت‌های علمی جدید علوم معاصر چی نقش دارند؟

مواد و روش کار: در این تحقیق، از مقالات و کتاب‌های معتبر که به‌صورت هارد و سافت از ژورنال‌های و نهادهای علمی معتبر استفاده‌شده است و چهار خصوصیت تحلیل محتوا در نظر گرفته‌شده است:

۱- از قواعد روشن جهت تحلیل محتوا و نتایج یکسان استفاده شد.

۲- از محتویات و نظریات نظام‌مند در موضوع مورد نظر بهره برده شد.

۳- از عناصر و مفاهیم معنادار در ارتباط به موضوع استفاده شد.

۴- ارتباط نظری موضوعات هم در نظر گرفته شد.

جدول (۱) معرفی بعضی از کتاب‌ها و مقالات به‌طور نمونه با تفکیک جمله یا مفهوم کلیدی و ارتباط آن با این تحقیق

شماره	تخلص نویسنده و سال نشر مقاله	نوع منبع	جمله یا مفهوم کلیدی که استفاده‌شده است.	ارتباط آن با تحقیق ما
۱	Wilson & john, 2013	کتاب	پس‌منظر تاریخی مربع های لاتین	در پیشینه از آن استفاده‌شده است
۲	Dénes & Keedwell, 2015	کتاب	ارتباط مربع های لاتین در گروپ های متناهی	ارتباط جدول کیلی
۳	Gupta & Baresary, 2014	مقاله	مرور روی مربع های لاتین	ازنظر مروری
۴	Bedforda,, Matthew & Ollis, 2003	مقاله	مربع های لاتین یک جدول کیلی برای گروپ های متناهی است.	جدول کیلی
۵	محمودیان، ۱۳۹۲	کتاب درسی	برخی از کاربردهای مربع‌های‌لاتین	کاربردهای مربع‌های لاتین

مربع‌های لاتین

تعریف: یک جدول $(n \times n)$ از n شی مختلف، مثلاً اعداد $1,2,3,\cdots,\mathrm{n}$ را یک مربع لاتین از مرتبه n گوییم اگر در هیچ سطر یا ستون آن عدد یا سمبول تکرار نباشد. یک مربع لاتین را به‌صورت $L = \{(i,j;a_{ij})|i = 1,2,\dots,n;\quad j = 1,2,\dots,n\}$ نیز نشان می‌دهند. یعنی عنصر a_{ij} در سطر $i-$ام و ستون $j-$ام قرار دارد (بشارتی نازلی، ۱۳۹۶).

مثال: مربع لاتین 4×4 به‌صورت زیرند:

جدول(۲):مربع‌های لاتین که در هیچ سطر و ستون آن عدد تکرار وجود ندارد.

4	3	2	1
2	1	4	3
1	2	3	4
3	4	1	2

واضح است که برای هر n، حداقل یک مربع لاتین از مرتبه n وجود دارد. مثلاً جدول که به شکل مترکسی به‌صورت زیر نوشته‌شده را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & \dots & n-2 & n-1 \end{bmatrix}$$

این مربع لاتین را مربع لاتین چرخشی گوییم که از این فورمول نیزبه دست می‌آید.

$$L = \{(i,j\,; i+j-1 (mod\ n)) \mid i = 1,2,\dots,n;\ j = 1،2، \dots ،n\}.$$

تعریف: یک مربع لاتین جزئی عبارت است از جدول $n \times n$ که ممکن است بعضی از خانه‌های آن خالی باشد و خانه‌های پر در آن از مجموعه اعداد $\{1،2،3، \dots ،n\}$ است به‌طوری‌که در هیچ سطر و در هیچ ستون آن تکرار نباشد (بشارتی، نازلی، ۱۳۹۶).

تعریف: مربع لاتین L را خودتوان می‌نامیم اگر $\forall\ 1 \le i \le n$ ، $L(i,i) = i$ یا $l_{ii} = i$. مربع لاتین L از مرتبه $2n$ را نیمه خودتوان می‌نامیم، اگر برای هر $1 \le i \le n$ ، $L(n+i, n+i) = i$ و $L(i,i) = i$ مربع لاتین L را جابه‌جایی (تبدیل) نامیم، هرگاه برای هر $1 \le i \le n$ ، $L(i,j) = L(j,i)$ گردد. تعداد خانه‌های پرشده مربع لاتین جزئی را حجم آن گویند و آنرا با سمبول $|p|$ نشان می دهیم. **مثال:** مربع لاتین جزیی که حجم آن $|p| = |6|$ است

4	3		1	5
5		4		1
			3	
2	1	5		
3	2	1	5	4

تعریف: فرض کنید L و L' دو مربع‌لاتین $n \times n$ روی مجموعه‌های X و X' باشند، در این صورت L و L' را متعامد گوییم هرگاه:

$$L \otimes L' = \{(l_{ij}, l_{ij}) | 1 \leq i, j \leq n\} = X \cdot X'$$

آنگاه $L' = [l_{ij}]_{n\times n}$ ، $L = [l_{ij}]_{n\times n}$ یا به عبارت‌دیگر دو مربع لاتین $[a_{ij}{}^{(1)}]$ و $[a_{ij}{}^{(2)}]$ را دو مربع لاتین متعامد گوییم هرگاه در جوره‌های مرتبی $(a_{ij}{}^{(1)}, a_{ij}{}^{(2)})$ تکرار وجود نداشته باشد (بشارتی. نازلی، ۱۳۹۶).

مثال: L و L' دو مربع لاتین متعامد مرتبه 4 هستند:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad L' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

جدول(4): مربع لاتین متعامد که از دو مربع لایتن به وجود آمده

$$L \otimes L' = \begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) & (4,4) \\ (4,3) & (3,4) & (2,1) & (1,2) \\ (2,4) & (1,3) & (4,2) & (3,1) \\ (3,2) & (4,1) & (1,4) & (2,3) \end{bmatrix}$$

پس L و L' متعامد هستند.

توجه: دو مربع لاتین متعامد 2×2 وجود ندارد، زیرا:

L=

1	2
2	1

L'=

1	2
2	1

$$X = X' = \{1, 2\}$$

در این صورت داریم

جدول(۵): مربع‌های لاتین که متعامد نیستند.

$L \otimes L' =$

(1,2)	(2,1)
(2,1)	(1,2)

, (1, 1), (2, 3)∈ $X \times X'$

که دو عنصر $(1,1)$ و $(2,2)$ از مجموعه $X \times X'$ را ندارد(زفره زارعی و ابدالی، ۱۴۰۱).

کاربرد مربع‌های‌لاتین

مربع‌های لاتین کاربردهای متنوعی در بسیاری از زمینه‌های علمی که برای هر بخش آن به‌طور مثال از آن یادآوری می‌کنیم:

1. کاربرد مربع لاتین در الجبر

فرض کنید G یک گروپ متناهی با مرتبه n باشد در این صورت جدول کیلی گروپ G، یک مربع لاتین است.

حل: فرض کنید $\mathrm{G} = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n\}$ که $g_j \neq g_k$.

جدول(٦): جدول کیلی برای عملیه دوگانه گروپ

$*$	g_1	g_2	$\cdots$	g_n
g_1	$g_1 * g_1$	$g_1 * g_2$	$\cdots$	$g_1 * g_n$
g_2	$g_2 * g_1$	$g_2 * g_2$	$\cdots$	$g_2 * g_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
g_n	$g_n * g_1$	$g_n * g_2$	$\cdots$	$g_n * g_n$

ثبوت غیرمستقیم: فرض کنید دو عنصر در یک سطر مساوی باشند، چون $j \neq k$ است پس تساوی آن‌یک تناقض است.

$$g_i * g_j = g_i * g_k \xrightarrow{\text{از چپ}\, *{g_i}^{-1}} g_j = g_k.$$

نکته: اگر مرتبه گروپ G طاق باشد یعنی $|G| = 2n + 1$ به‌طوری‌که $g_i \neq g_j$ درآن‌صورت روی قطر اصلی همه عناصر G ظاهر می‌شوند. (در هر سطر و ستون عنصر تکراری نداریم). زیرا فرض کنیم ${g_i}^2 = {g_j}^2$ درآن صورت طرفین را به توان n بالا می‌بریم:

$${g_i}^{2n} = {g_j}^{2n} \qquad (1)$$

از طرفی: ${g_i}^{2n+1} = {g_j}^{2n+1}$ پس با در نظر داشت رابطه (1) داریم:

$${g_i}^{2n} \times g_i = {g_j}^{2n} \times g_j ، \ g_i \neq g_j.$$

که این نیز تناقض است(Bedford et al., 2003).

قضیه: برای هر $n > 2$ ، حداقل یک مربع لاتین خود توان مرتبه n وجود دارد.

ثبوت: حالت اول: اگر n تاق باشد، مربع لاتین $L = (l_{ij})_{n\times n}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$l_{ij} = 2i - j(mod\ n)$$

در این صورت در سطرهای L عنصر تکراری وجود ندارد.

ثبوت غیرمستقیم: فرض کنیم عنصر تکراری وجود دارد در آن صورت

$$\begin{matrix} l_{ij} = l_{ij'} \\ i \neq j \end{matrix} \Longrightarrow 2i - j \equiv 2i - j'(mod\ n) \Longrightarrow j \equiv j'(mod\ n)$$

که این تناقض است.

همچنین در هر ستون L نیز عنصر تکراری نداریم.

$$l_{ij} = l_{i'j} \Longrightarrow 2i - j \equiv 2i' - j(mod\ n) \Longrightarrow 2i \equiv 2i'(mod\ n) \xRightarrow[\text{زیرا } n \text{ تاق است}]{(2,n)=1} i \equiv i'(mod\ n)$$

که این نیز تناقض است.

پس $L = (l_{ij})_{n\times n}$ یک مربع لاتین است و داریم: $l_{ii} = 2ii - i = i$

حالت دوم: اگر n جفت باشد، در آن‌وقت $n - 1$ تاق است، بنابر حالت اول یک مربع لاتین خود توان مرتبه $n - 1$ مانند L_{n-1} وجود دارد.

حال اگر به‌جای عناصر $(n-2)(n-1), \cdots, 34,23,12$ از مربع لاتین L_{n-1} عدد n را قرار دهیم و ستون را به‌عنوان ستون آخر L_{n-1} اضافه کرده و همچنین سطر:

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-2 \\ n \end{bmatrix}$$

$[n-2 \quad n-1 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad n-3 \quad n]$ را به‌عنوان سطر آخر L_{n-1} اضافه کنیم در آن‌صورت مربع به وجود آمده یک مربع لاتین $n \times n$ خود توان است.

مثال: یک مربع لاتین خودتوان 6×6 را با استفاده از قضیه فوق می‌سازیم.

چون $n = 6$ زوج است پس مربع‌لاتین خود توان مرتبه $n - 1 = 6 - 1 = 5$ وجود دارد.

$l_{ij} \equiv 2i - j(mod\ n)$

در مکان‌های $12,23,34, \cdots, (n-2)(n-1)$ ، $n = 6$ می‌گذاریم.

$l_{11} \equiv 2 \cdot 1 - 1 = 1(mod\ 5)$

$l_{12} \equiv 2 \cdot 1 - 2 = 0(mod\ 5)$

$l_{13} \equiv 2 \cdot 1 - 3 = -1 = 4(mod\ 5)$

$l_{14} \equiv 2 \cdot 1 - 4 = -2 = 3(mod\ 5)$

$l_{15} \equiv 2 \cdot 1 - 5 = -3 = 2(mod\ 5)$

$l_{41} \equiv 2 \cdot 4 - 1 = 7 = 2(mod\ 5)$

به همین صورت تمام عناصر جدول مربع لاتین را دریافت می‌کنیم. و در آخر هم طبق قضیه سطر و ستون را با خاصیت داده به آن اضافه می‌کنیم درنتیجه یک مربع لاتین خودتوان 6×6 تشکیل می‌شود (Van Lint, Wilson, 2001).

جدول(۷): مربع لاتین خود توان که با استفاده از قضیه بدست آمده.

1	6	4	3	2	5
3	2	6	5	4	1
5	4	3	6	1	2
2	1	5	4	6	3
6	3	2	1	5	4
4	5	1	2	3	6

قضیه: برای n های تاق، همیشه دو مربع لاتین متعامد $n \times n$ وجود دارد.

ثبوت: کافی است G را گروپ n عضوی درنظر بگیریم، دو مربع لاتین زیر با استفاده از G به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x, y \in G: \begin{cases} L_1(x,y) = x \cdot y \\ L_2(x,y) = x \cdot y^{-1} \end{cases}$$

دو مطلب را می‌خواهیم ثبوت کنیم:

۱) L_i مربع لاتین است. ۲) L_1 و L_2 دو مربع لاتین متعامد هستند.

مطلب اول: به راحتی دیده می‌شود که L_1 و L_2 مربع لاتین هستند. فرض کنیم در سطر i -ام L_1 عنصر تکراری داریم:

$$g_i g_j = g_i g_k \xRightarrow{\times {g_i}^{-1}} g_j = g_k.$$

که این یک تناقض است.

برای L_2 نیز به‌طور مشابه داریم:

$$g_i {g_j}^{-1} = g_i {g_k}^{-1} \xRightarrow{\times {g_i}^{-1}} {g_j}^{-1} = {g_k}^{-1} \Longrightarrow g_j = g_k$$

که این نیز تناقض است.

مطلب دوم: برای اثبات متعامد بودن L_1 و L_2 از فرض متضاد استفاده می‌کنیم پس کافی است نشان دهیم که دو جوره مرتب مربع‌لاتین متعامد باهم مساوی باشند یعنی به شکل تکرار آمده باشند.

$$\big(L_1(x,y), L_2(x,y)\big) = (L_1(x',y'), L_2(x',\ y')) \Longrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} L_1(x,y) = L_1(x',y') \\ L_2(x,y) = L_2(x',y') \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = x'y' & (1) \\ xy^{-1} = x'y'^{-1} \Longrightarrow yx^{-1} = y'x'^{-1} & (2) \end{cases} \xRightarrow{2\times 1} y^2 = {y'}^2 \qquad (3)$$

از طرفی مرتبه $O(G) = n$ داریم: $\forall g \in G: g^n = e \quad (4)$ و $\underset{n \text{ تاق}}{(n,2) = 1} \Longrightarrow$

$$n = 2k + 1$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} (y^2)^k \cdot y = \left({y'}^2\right)^k \cdot y' \xRightarrow{\text{از 3 داریم}} y = y' \xRightarrow{\text{در رابطه 1 قرار دهید}} x = x'$$

بنابراین ثابت شد که دو جوره مرتب یک مربع لاتین متعامد نمی‌تواند باهم مساوی باشند (van Lint, Wilson, 2001).

2. کاربر مربع‌لاتین در علوم طبی

فرض کنید دانشمندی می‌خواهد چهار داروی مختلف (به نام های A، B، C و D) را روی چهار داوطلب آزمایش کند، برای اینکه آن را به یک آزمایش منصفانه تبدیل کند، او تصمیم می‌گیرد که هر داوطلب باید هر هفته با یک داروی متفاوت آزمایش شود، اما هیچ دو داوطلب اجازه ندارند هم‌زمان داروی

مشابهی داشته باشند که هر ردیف نماینده داوطلب متفاوت و هر ستون نشان‌دهنده هفته متفاوت است. می‌توانیم کل آزمایش را با استفاده از مربع‌لاتین زیر برنامه‌ریزی کنیم (Denes & Keedwell, 1974).

جدول(8): آزمایش دارو در بین افراد باتفکیک زمان.

	هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم
داوطلب اول	A	B	C	D
داوطلب دوم	C	D	A	B
داوطلب سوم	D	C	B	A
داوطلب چهارم	B	A	D	C

۳. بازی سودوکو[51]

سودوکو یک بازی معمایی است که از اعداد (حروف یا اشیاء) تشکیل‌شده است. اولین جدول سودوکو امروزی در سال 1979م منتشر شد. این بازی توسط یک معمار متقاعد 74 ساله جاپانی ساخته شد. سودوکو، مخفف یک عبارت جاپانی[52] که خوانده می‌شود "سوجی وا دوکوشین نی کاگیرو" به معنی «ارقام باید تنها باشند» است که در جاپان در سال 1984م معرفی شد. چون نام بازی سخت بود برای همین جاپانی‌ها نام آن را به سودوکو تغیر دادند. سودوکو شامل یک جدول کامل به اندازه 9 در 9 است که کل جدول به 9 جدول کوچکتر با اندازه 3 در 3 تقسیم‌بندی شده است. در ابتدای بازی چندین عدد به‌صورت پیش‌فرض قرار داده‌شده است. قوانین بازی به سه بخش تقسیم می‌شود.

قانون اول: در هر سطر از جدول سودوکو اعداد 1 تا 9 بدون تکرار قرار می‌گیرند.

قانون دوم: در هر ستون جدول اعداد 1 الی 9 بدون تکرار قرار گیرد.

قانون سوم: در هر ناحیه 3×3 جدول اعداد 1 الی 9 بدون تکرار قرار گیرد.

مانند هر بازی دیگر دانش آموزان می‌توانند آن را در اختیار داشته باشد. بازی سودوکو تمام عناصر یک بازی معمایی خوب را دارا می‌باشد مانند؛ سرگرمی، هیجان و چالش ذهنی که با حس مثبت و خوب آن به‌سادگی اعتیادآور است، بااین‌حال، علاوه بر ارزش‌های تفریحی که سودوکو به بازی کنندگان علاقه‌مند ارایه می‌کند، همچنان برای انکشاف مهارت‌های عددی دانش‌آموزان، برنامه‌ها را پیشکش می‌کنند (Gupta & Ancient, 2014).

[51] Sudoku game

جدول(۹): جدول بازی سودوکو

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

4. کاربرد مربع لاتین متعامد در صنعت

فرض کنید 5 کارگر در هر هفته هرکدام 5 روز کار می‌کند و 5 ماشین نخ ریستی وجود دارد. آیا امکان دارد که هر کارگر در روزهای مختلف با ماشین‌های مختلف کار کند؟ البته جواب مثبت است چون کافی است یک مربع لاتین 5×5 را در نظر بگیریم و o_i ها شماره کارگرها و اعداد 1 تا 5 شماره ماشین‌ها باشند. به‌طور مثال فرض کنیم یک جدول به‌صورت زیر داشته باشیم.

جدول(۱۰): 5 کارگری که در 5 روز، روی 5 ماشین مختلف کار می‌کنند.

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
شنبه	1	2	4	3	5
یکشنبه	3	4	1	5	2
دوشنبه	2	3	5	4	1
سه‌شنبه	5	1	3	2	4
چهارشنبه	4	5	2	1	3

حال اگر 5 نوع نخ وجود داشته باشد و بخواهیم این نخ‌ها را در هر ماشین به کار ببریم و هر کارگر نیز طی هفته با هر ماشین و هر نوع نخ کارکرده باشد. آنگاه می‌توان از دو مربع لاتین متعامد استفاده کرد. مثلاً اگر تارهای مختلف را y_1، y_2، y_3، y_4 و y_5 که ماشین‌های مختلف را از 1 تا 5 شماره‌گذاری کنیم دو مربع لاتین متعامد از مرتبه 5 را می‌توانیم چنین بگیریم:

جدول(۱۱): جدولی مربع لاتین متعامد

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
شنبه	$1y_1$	$2y_4$	$4y_5$	$3y_2$	$5y_3$
یکشنبه	$3y_3$	$4y_1$	$1y_2$	$5y_4$	$2y_5$
دوشنبه	$2y_2$	$3y_5$	$5y_1$	$4y_2$	$1y_4$
سه‌شنبه	$5y_5$	$1y_3$	$3y_4$	$2y_1$	$4y_2$
چهارشنبه	$4y_4$	$5y_2$	$2y_3$	$1y_5$	$3y_1$

(Lindner & Rodger, 2018).

5.کاربرد مربع‌های لاتین در زراعت

فرض کنید n نوع کود مختلف را می‌خواهیم بر روی n نوع گیاه مختلف آزمایش کنیم(زمین نیز ازنظر استراحت‌کشتی دارای انواع مختلف است)، زمین را به شکل $n \times n$ در نظر می‌گیریم. زمین‌های واقع در سطرهای مختلف نیز از نظر مقدار آفتاب‌گیری متفاوت‌اند، در هر ردیف و در هر ستون از هر نوع کود و از هر گیاهی آزمایش شود، به‌طوری‌که نهایتاً هر نوع کود با هر نوع گیاه لااقل یک‌بار آزمایش‌شده باشد. اگر دو تا مربع متعامد از مرتبه n موجود باش این آزمایش امکان‌پذیر خواهد بود(Computing & Gupta, 2014).

کاربرد مربع‌های لاتین در طرح تسهیم راز

طرح تسهیم راز روشی است برای تسهیم راز k به سهم‌های $\{s_1 . s_2 . s_3 . \dots s_n\}$ و توزیع محرمانه‌ای از سهم‌ها بین تعداد متناهی از شرکای $p = \left\{p_1 ، p_2 ، p_3 ، \dots ، p_n\right\}$ به‌نحوی‌که زیرمجموعه‌های مشخص‌شده‌ای از شرکا بتوانند کلید k را بازسازی نمایند. راز k توسط تسهیم کننده‌ی D تعیین و تسهیم می‌شود. فرض می‌شود که تقسیم‌کننده خود جزئی از مجموعهٔ شرکا نیست و سهم‌های شرکا را به‌صورت محرمانه بین آن‌ها توزیع و ارسال می‌نماید (محمودیان،۱۳۹۲).

نتیجه‌گیری

مربع‌های‌لاتین حوزه‌ای جذاب از ریاضی کاربردی و محض است که تأثیر عمیقی بر بسیاری از زمینه‌های تحصیلی، از جمله علوم کمپیوتر گرفته، رمزنگاری و فراتر از آن دارد. با یادگیری مربع‌های‌لاتین، دیدگاه جدیدی در حل مسئله و ابزاری قدرتمند برای کاوش در دنیای اطراف خود به دست می‌آورید.(Gupta, Basal and Baresary) میتودولوژی توسعه مربع‌های‌لاتین در کمپیوتر لیست کرده که این میتودولوژی زمان پروسس بالایی دارند. (زفره زارعی و ابدالی) یک الگوریتم رمزنگاری تصاویر دیجیتل مبتنی بر مربع‌های‌لاتین جادویی با ساختار" پیش‌پردازش- جایگشت و جانشینی" ارائه کرده. (Evans) نتیجه به دست آورده که اگر q

توان 2 و $q \neq 2$ باشد آنگاه $GL(n, q)$ می‌تواند گروه ضربی یک نیوفیلد[٥٣] باشد. در آخر تحقیق نتیجه‌ای را به دست آوردیم که مربع‌های‌لاتین از سال‌های قدیم در طبیعت موجود بوده و در سال ۱۷۸۲ م شامل بحث‌های ریاضی شد و در قالب و زبان ریاضی تعریف و خواص آن بررسی گردید. در ابتدا در قطعه های بازی استفاده می‌شد، اما به‌مرور زمان، کاربرد و اهمیت آن توسعه یافت. مربع‌های لاتین در ریاضیات کاربرد متنوع دارند. به‌عنوان‌مثال؛ مربع‌های لاتین به‌طور گسترده‌ای در ستیگنوگرافی، رمزنگاری، دیجیتل واترمارک، بازی‌های‌کمپیوتری، بازی‌های سودوکو، تجزیه‌وتحلیل گراف‌های شبکه‌ای، کدهای تصحیح‌خطا، تولید مربع‌های‌جادویی، احصائیه و دیگر زمینه‌های ریاضی استفاده می‌شود. ما در این مقاله کاربرد مربع‌های لاتین در گروپ‌های متناهی که بخشی از الجبر مجرد (الجبر معاصر) است به بررسی گرفتیم و دریافت کردیم که تعریف مربع‌های لاتین در تعریف جدولی کیلی برای عملیه گروپ‌های متناهی نیز صدق می‌کند.

منابع

بشارتی. نازلی، (۱۳۹٦)، ترکیبیات و کاربردها، انتشارات دانشگاه پیام نور، ایران: تهران.

محمودیان، سید عباداله،(۱۳۹۲)، مباحثی در آنالیز ترکیبی(ترکیبیات)، انتشارات دانشگاه شریف، ایران: تهران.

زارعی زفره, ابراهیم, و ابدالی. (۲۰۲۲). الگوریتم رمزنگاری تصاویر مبتنی برمربع‌های‌لاتین و جادویی. دوفصل نامه علمی ترویجی منادی امنیت فضای تولید و تبادل اطلاعات (افتا), ۱۰۳-۱۱٤.

Bedford, D., Johnson, M., & Ollis, M. A. (2003). Defining sets for Latin squares given that they are based on groups. European Journal of Combinatorics, 24(1), 129-135.

Bryant, V. (1993). Aspects of combinatorics: a wide-ranging introduction. Cambridge university press.

Cameron, P. J. (1994). Combinatorics: topics, techniques, algorithms. Cambridge University Press.

Dénes, J., & Keedwell, A. D. (1991). Latin squares: New developments in the theory and applications (Vol. 46). Elsevier.

D. E. Knuth, The Art of Computer Programming, Vol. 4A, Combinatorial Algorithms, Part 1, Addison-Wesley (2011), Section 7.2.1.7.

Evans, A. B. (2014). Mutually orthogonal Latin squares based on general linear groups. Designs, codes and cryptography, 71, 479-492.

Gupta, Y., Bansal, A., & Baresary, D. (2014). Review on latin square. Int. J. CSMC, 3(7), 338-342.

Goddyn, L., & Halasz, K. (2020). All group-based latin squares possess near transversals. *Journal of Combinatorial Designs*, *28*(5), 358-365.

Goddyn, L., & Halasz, K. (2020). All group-based latin squares possess near transversals. *Journal of Combinatorial Designs*, *28*(5), 358-365.

Halasz, K. C. (2017). Coloring cayley tables of finite groups.

[6] Neofield

Isaksson, E. (2021). Latin Squares and Tactical Configurations.

Kircher, Ars Magna Sciendi Sive Combinatoria, Johannes Janssonius a Waesberge, Amsterdam (1669), 170.

Keedwell, A. D., & Dénes, J. (2015). Latin squares and their applications. Elsevier.

Mandl, R. (1985). Orthogonal Latin squares: an application of experiment design to compiler testing. Communications of the ACM, 28(10), 1054-1058.

Mann, H. B. (1944). On orthogonal Latin squares. Bulletin of the American Mathematical Society, 50(4), 249-257.

Mohan, R. N., Lee, M. H., & Pokreal, S. (2006). On orthogonality of Latin squares. *arXiv preprint cs/0604041*.

Schmidt, N. O. (2016). Latin squares and their applications to cryptography.

Tang, J. (2009). Latin squares and their applications. Np: np.

Van Lint, J. H., & Wilson, R. M. (2001). A course in combinatorics. Cambridge university press.

Vanpoucke, J. (2012). Mutually orthogonal latin squares and their generalizations. *A Master thesis submitted to the Faculty of Sciences Ghent University*.

Wilson. Robin, john j. Watkins, COMBINATORICS: ANCIENT AND MODERN, Oxford University Press, 2013.

Zantema, H., & Joosten, S. J. C. (2015). Latin squares with graph properties.

Two quarterly
Ainak Academic- Research Journal
Logar Higher Education Institute Journal license date: June/2023

Application of Latin squares and its relationship with Cayley's table in finite groups

Ghulam Habib Habibi[1]& Abdulsaboor Faizi[2]
[1,2] Department of Mathematics, Education Faculty, Logar Institute of Higher Education
Email:gh.habibhabibi7@gmail.com

ABSTRACT

Statement of the problem: Latin squares have a wide application in today's technology and natural sciences, through which we can achieve many goals in contemporary sciences, especially mathematics and computers, and the direct connection between Latin squares and finite groups in abstract algebra is further clarified.
Objective: The purpose of writing this article is to investigate the use of Latin squares in modern science and its relationship with the Cayley table in finite groups.
Research method: Our work method is document and library review. We reviewed the works of researchers and examined the new results in this article.
Conclusion: The results of this research show that Cayley's table in finite groups has a direct relationship with the definition of Latin squares. Latin squares have various applications in contemporary science, computers and especially mathematics; For example, in steganography, cryptography, digital watermarks, computer games, Sudoku games, Network graph analysis, Error-correcting codes, the production of magic squares, statistics and other mathematical fields. Latin squares are widely used in contemporary science and technology and play an important role in scientific research developments.

Keywords: Latin squares, orthogonal and self-orthogonal Latin squares, Cayley's table and finite groups.

Cite this article: Habibi, Ghulam Habib & Faizi, Abdulsaboor.(2024). Applications of Latin squares and its relationship with Cayley's table in finite groups, Ainak Academic – Research Journal (Two Quarterly). 1(2): 64-78
Logar Higher Education Institute